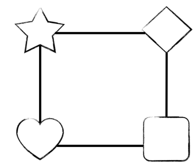
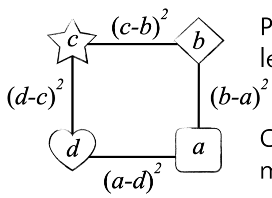
Nivel 2, día 1

Problema 2

En el entrenamiento de un estado, la entrenadora les propone un juego. La entrenadora escribe en el pizarrón cuatro números reales en orden de menor a mayor: $a < b < c < d$.

Cada olímpica dibuja en su cuaderno la figura de la derecha y acomoda los números dentro de las formas de las esquinas, de la manera que ella quiera, poniendo un número en cada una. Una vez acomodados, sobre cada segmento escribe el cuadrado de la diferencia de los números en sus extremos. Después, suma los 4 números obtenidos.





Por ejemplo, si Vania los acomoda como en la figura de la derecha, entonces el resultado le quedaría

$$(c-b)^2 + (b-a)^2 + (a-d)^2 + (d-c)^2.$$

Ganan las olímpicas que obtienen el menor resultado. ¿De qué maneras pueden acomodar los números para ganar? Da todas las soluciones.

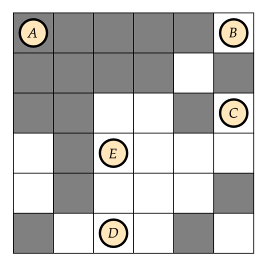
Problema 3

Se van a colorear todas las casillas de un tablero de 2022×2022 de blanco o negro. En varias de estas casillas se van a colocar fichas, a lo más una por casilla. Decimos que dos fichas *se atacan mutuamente*, cuando se cumplen las siguientes dos condiciones:

a) Hay un camino de cuadritos que une las casillas en donde fueron colocadas las fichas. Este camino puede tener dirección horizontal, vertical, o diagonal.

b) Todas las casillas en este camino, incluyendo las casillas donde están las fichas, son del mismo color.

Por ejemplo, la siguiente figura muestra un ejemplo pequeño de una posible coloración de un tablero de 6×6, con fichas A, B, C, D, y E colocadas. Los pares de fichas que se atacan mutuamente son (D, E), (C, D), y (B, E).



¿Cuál es el máximo valor de k tal que es posible colorear el tablero y colocar k fichas sin que ningún par de ellas se ataquen mutuamente?

Problema 4

Sea k un entero positivo y sea m un entero impar. Prueba que existe un entero positivo n tal que $n^n - m$ es divisible por 2^k.

¡Te deseamos mucho éxito!

Tiempo de examen: 4 horas y media
Tiempo de preguntas: 1 hora

Nivel 2, día 2

Problema 6

Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{5a^4 + a^2}{b^4 + 3b^2 + 4}$$

es un número entero. Demuestra que a **no** es un número primo.

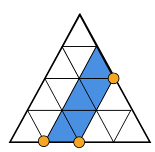
Problema 7

Sea $ABCD$ un paralelogramo (que no sea rectángulo) y sea Γ la circunferencia que pasa por A, B, D. Sean E y F las intersecciones de BC y DC con Γ respectivamente ($E \neq B$, $F \neq D$). Tenemos que los puntos P y Q son las intersecciones de ED con BA y de FB con DA, respectivamente. Si las rectas PQ y CA se intersectan en R, muestra que:

$$\frac{PR}{RQ} = \left(\frac{BC}{CD}\right)^2.$$

Problema 8

Sea n un entero positivo. Considera un tablero en forma de triángulo equilátero, con lados de longitud n, dividido en triangulitos equiláteros de lado 1. Algunos de los $1 + 2 + \ldots + (n+1)$ vértices de los triangulitos equiláteros en los que se divide el tablero se han marcado. Se cumple que para todo entero $k \geq 1$, ningún trapecio con lados cuyas longitudes son $1, k, 1, k+1$ y con vértices en el tablero tiene todos sus vértices marcados. Además, ningún triangulito equilátero de lado 1 tiene sus tres vértices marcados. ¿Cuál es la mayor cantidad de vértices que se pudieron haber marcado?



Nota: En la figura se muestra un ejemplo de un tablero cuando $n = 4$, y un ejemplo de uno de los trapecios mencionados, con tres de sus vértices marcados y con $k = 2$.

¡Te deseamos mucho éxito!

Tiempo de examen: 4 horas y media
Tiempo de preguntas: 1 hora