Segundo Concurso Nacional Femenil
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

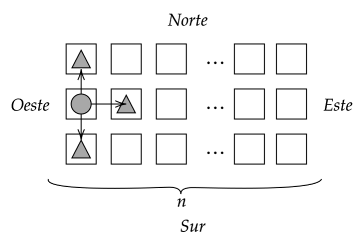
Examen por equipos

Problema 1

Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$, y sean D y E puntos sobre los segmentos AB y BC, respectivamente, tales que las rectas DE y AC son paralelas. Se considera el punto F sobre la prolongación de DE de manera que $CADF$ sea un paralelogramo. Si O es el circuncentro del triángulo BDE, demuestra que los puntos O, F, A y D están sobre una misma circunferencia.

Problema 2

En la ciudad de *Las Cobayas* las casas están distribuidas formando un arreglo rectangular de 3 filas y $n \geq 2$ columnas, como ilustra la figura. Mich planea mudarse ahí, y quiere recorrer la ciudad para visitar algunas de las casas, de modo que visite al menos una casa de cada columna y no visite una misma casa más de una vez. En su recorrido, Mich puede moverse entre casas adyacentes; es decir, después de visitar una casa, puede continuar su recorrido visitando alguna de las casas vecinas al norte, sur, este u oeste, que son máximo cuatro. La figura ejemplifica una posición de Mich (círculo), y las casas hacia las cuales puede moverse (triángulos). Sea $f(n)$ la cantidad de formas en que Mich puede hacer su recorrido iniciando en una casa de la primera columna y terminando en una casa de la última columna. Demuestra que $f(n)$ es impar.



Problema 3

Encuentra todas las ternas (a, b, c) de números reales todos distintos de cero que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a^4 + b^2c^2 &= 16a \\ b^4 + c^2a^2 &= 16b \\ c^4 + a^2b^2 &= 16c. \end{aligned}$$

¡Les deseamos mucho éxito!

Tiempo de trabajo individual y preguntas: 45 minutos
Tiempo de discusión: 3 horas
Tiempo de redacción: 45 minutos
Tiempo total de examen: 4 horas y media