

Nivel 2, día 1

Problema 2

Matilda dibuja 12 cuadriláteros. El primer cuadrilátero que dibuja es un rectángulo de lados enteros y 7 veces más ancho que alto. Cada vez que termina de dibujar un cuadrilátero, une los puntos medios de cada pareja de lados consecutivos con segmentos de recta para así obtener el siguiente cuadrilátero. Se sabe que el último cuadrilátero que dibuja Matilda es el primero en tener área menor que 1. ¿Cuál es el área máxima posible del primer cuadrilátero?



Nota: La figura de arriba ilustra cómo se verían los primeros dos cuadriláteros que dibuja Matilda.

Problema 3

Un país llamado Máxico tiene dos islas, la isla Mayor y la isla Menor. La isla Mayor está compuesta por $k > 3$ estados, con exactamente $n > 3$ ciudades cada uno, de manera que tiene kn ciudades en total. La isla Menor tiene sólo un estado, el cual tiene 31 ciudades. Dos aerolíneas de alto renombre, *Aeropapantla* y *Aerocenzontle*, ofrecen vuelos alrededor de Máxico. *Aeropapantla* ofrece vuelos directos desde cualquier ciudad hasta cualquier otra ciudad de Máxico. *Aerocenzontle* sólo ofrece vuelos directos desde cualquier ciudad de la isla Mayor hasta cualquier otra ciudad de la isla Mayor.

Cada aerolínea calcula qué porcentaje de sus propios vuelos directos conectan dos ciudades que se encuentran en el mismo estado. Así, se calcularon dos porcentajes en total, uno por cada aerolínea. Si sabemos que ambas aerolíneas obtuvieron el mismo porcentaje, ¿cuál es el menor número de ciudades que puede haber en la isla Mayor?

Problema 4

Se tiene una función g tal que para todo entero n :

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$$

También se tiene una función f que cumple lo siguiente para todos los enteros $n \geq 0$ y $m \geq 0$:

$$f(0, m) = 0 \quad \text{y}$$

$$f(n+1, m) = \left(1 - g(m) + g(m) \cdot g(m-1 - f(n, m))\right) \cdot \left(1 + f(n, m)\right).$$

Encuentra todas las posibles funciones f que cumplen estas condiciones. Es decir, encuentra todas las asignaciones $f(m, n)$ que cumplen las propiedades de arriba para todos los enteros $n \geq 0$ y $m \geq 0$.

¡Te deseamos mucho éxito!

Tiempo de examen: 4 horas y media

Tiempo de preguntas: 1 hora

Nivel 2, día 2

Problema 6

Alka encuentra escrito en un pizarrón un número n que termina en 5. Realiza una secuencia de operaciones con el número en el pizarrón. En cada paso, decide realizar una de las dos operaciones siguientes:

1. Borrar el número escrito m y escribir su cubo m^3 .
2. Borrar el número escrito m y escribir el producto $2023m$.

Alka realiza cada operación un número par de veces en algún orden y al menos una vez, y obtiene finalmente el número r . Si la cifra de las decenas de r es un número impar, encuentra todos los valores posibles que la cifra de las decenas de n^3 pudo haber tenido.

Problema 7

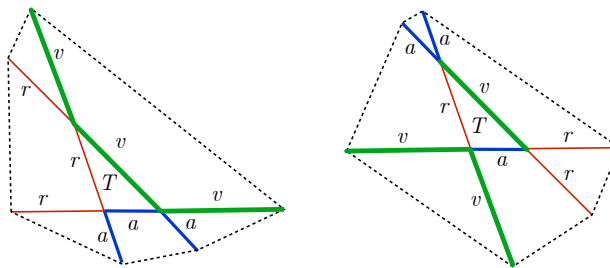
Supongamos que a y b son números reales tales que $0 < a < b < 1$. Sean

$$x = \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{b+a}}, \quad y = \frac{1}{b-a} - \frac{1}{b} \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{\sqrt{b-a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}.$$

Muestra que x , y y z quedan siempre ordenados de menor a mayor de la misma manera, independientemente de la elección de a y b . Encuentra dicho orden entre x , y y z .

Problema 8

Se tienen 9 palitos de madera: 3 azules de longitud a cada uno, 3 rojos de longitud r cada uno y 3 verdes de longitud v cada uno, tales que es posible formar un triángulo T con palitos de colores todos distintos. Dana puede formar dos arreglos, comenzando con T y utilizando los otros seis palitos para prolongar los lados de T , como se muestra en la figura. De esta manera, se pueden formar dos hexágonos cuyos vértices son los extremos de dichos seis palitos. Demuestra que ambos hexágonos tienen la misma área.



Nota: La figura de arriba sólo indica la configuración que forma Dana, no el tamaño exacto de los palitos. Se podrían formar más arreglos distintos con los palitos, pero sólo consideramos los dos que muestra la figura.

¡Te deseamos mucho éxito!

Tiempo de examen: 4 horas y media

Tiempo de preguntas: 1 hora