Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Femenil

Tercer Concurso Nacional Femenil
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Nivel 1, día 1

Problema 1

Sea x un número real. Determina la solución de la siguiente ecuación:

$$\frac{x^2+1}{1}+\frac{x^2+2}{2}+\frac{x^2+3}{3}+\dots\frac{x^2+2024}{2024}=2024$$

Problema 2

Se tienen 50 papelitos con los números del 1 al 50. Se quieren tomar 3 papelitos de manera que a cualquiera de los tres números, dividido entre el máximo común divisor de los otros dos, se le pueda sacar la raíz cuadrada tal que quede un número racional.
¿Cuántas tercias (no ordenadas) de papelitos cumplen con esta condición?

Nota: Un número es racional si puede escribirse como la división de 2 enteros.

Problema 3

Sea ABC un triángulo y D el pie de altura desde A. Sea M un punto tal que $MB = MC$. Sean E y F las intersecciones del circuncírculo de BMD y CMD con AD. Sean G y H las intersecciones de MB y MC con AD. Demuestra que $EG = FH$.

¡Te deseamos mucho éxito!

Tiempo de examen: 4 horas y media
Tiempo de preguntas: 1 hora

Nivel 1, día 2

Problema 5

Se tiene el triángulo acutángulo ABC. El segmento BC mide 40 unidades. Sea H el ortocentro del triángulo ABC y O su circuncentro. Sean D el pie de altura desde A y E el pie de altura desde B. Además el punto D parte al segmento BC de manera que $\frac{BD}{DC} = \frac{3}{5}$. Si la mediatriz del segmento AC pasa por el punto D, calcula el área del cuadrilátero $DHEO$.

Nota: El ortocentro es el punto donde se intersecan las tres alturas de un triángulo. El circuncentro es el centro del círculo que pasa por los tres vértices del triángulo.

Problema 6

En un tablero de 4×4 cada casilla se colorea de negro o blanco de tal manera que cada fila y cada columna tenga una cantidad par de casillas negras. ¿De cuántas maneras se puede colorear el tablero?

Problema 7

Consideremos la ecuación cuadrática $x^2 + a_0x + b_0$ para algunos reales (a_0, b_0). Repetimos el siguiente proceso tantas veces como sea posible:

Tomamos r_i, s_i las raíces de la ecuación $x^2 + a_ix + b_i$ y $c_i = \min\{r_i, s_i\}$. Y escribimos la nueva ecuación $x^2 + b_ix + c_i$. Es decir, para la repetición $i + 1$ del proceso, $a_{i+1} = b_i$, y $b_{i+1} = c_i$.

Decimos que (a_0, b_0) es una pareja *interesante* si, después de un número finito de repeticiones, cuando volvemos a realizar el proceso la nueva ecuación escrita es la misma que la anterior, de manera que $(a_i, b_i) = (a_{i+1}, b_{i+1})$. Encuentra cuáles son todas las parejas interesantes.

Nota: Las raíces de una ecuación son los valores de x tales que $x^2 + ax + b = 0$

¡Te deseamos mucho éxito!

Tiempo de examen: 4 horas y media
Tiempo de preguntas: 1 hora