Tercer Concurso Nacional Femenil
Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Nivel 2, día 1

Problema 2

Se tienen 50 papelitos con los números del 1 al 50. Se quieren tomar 3 papelitos de manera que a cualquiera de los tres números, dividido entre el máximo común divisor de los otros dos, se le pueda sacar la raíz cuadrada tal que quede un número racional.
¿Cuántas tercias (no ordenadas) de papelitos cumplen con esta condición?

Nota: Un número es racional si puede escribirse como la división de 2 enteros.

Problema 3

Sea ABC un triángulo y D el pie de altura desde A. Sea M un punto tal que $MB = MC$. Sean E y F las intersecciones del circuncírculo de BMD y CMD con AD. Sean G y H las intersecciones de MB y MC con AD. Demuestra que $EG = FH$.

Problema 4

Hay 6 cuadrados en una fila. Cada uno se etiqueta con el nombre de Ana o Beto y con un número del 1 al 6, usando cada número sin repetir. Ana y Beto juegan a pintar cada cuadrado siguiendo el orden de los números en las etiquetas. Quien pinte el cuadrado será la persona cuyo nombre esté en la etiqueta. Al pintarlo, la persona podrá elegir si pintar el cuadrado de rojo o de azul. Beto gana si al final hay la misma cantidad de cuadrados azules como rojos, y Ana gana en caso contrario. ¿En cuántas de todas las posibles maneras de etiquetar los cuadrados puede Beto asegurar su victoria?

El siguiente es un ejemplo de una asignación de etiquetas.

Ana	1	Beto	3	Ana	5	Beto	2	Ana	4	Beto	6

Primero Ana pinta el primer cuadrado, luego Beto pinta el cuarto cuadrado, luego Beto pinta el segundo cuadrado, y así sucesivamente.

¡Te deseamos mucho éxito!

Tiempo de examen: 4 horas y media
Tiempo de preguntas: 1 hora

Nivel 2, día 2

Problema 6

En un tablero de 4×4 cada casilla se colorea de negro o blanco de tal manera que cada fila y cada columna tenga una cantidad par de casillas negras. ¿De cuántas maneras se puede colorear el tablero?

Problema 7

Consideremos la ecuación cuadrática $x^2 + a_0x + b_0$ para algunos reales (a_0, b_0). Repetimos el siguiente proceso tantas veces como sea posible:

Tomamos $r_i,\ s_i$ las raíces de la ecuación $x^2 + a_ix + b_i$ y $c_i = \min\{r_i, s_i\}$. Y escribimos la nueva ecuación $x^2 + b_ix + c_i$. Es decir, para la repetición $i + 1$ del proceso, $a_{i+1} = b_i$, y $b_{i+1} = c_i$.

Decimos que (a_0, b_0) es una pareja *interesante* si, después de un número finito de repeticiones, cuando volvemos a realizar el proceso la nueva ecuación escrita es la misma que la anterior, de manera que $(a_i, b_i) = (a_{i+1}, b_{i+1})$. Encuentra cuáles son todas las parejas interesantes.

Nota: Las raíces de una ecuación son los valores de x tales que $x^2 + ax + b = 0$

Problema 8

Encuentra todos los enteros positivos n tales que de los n números

$$2n + 1,\ \ 2^2n + 1,\ \ldots\ ,\ \ 2^nn + 1$$

se tiene que $n, n - 1$ o $n - 2$ de ellos, son números primos.

¡Te deseamos mucho éxito!

Tiempo de examen: 4 horas y media
Tiempo de preguntas: 1 hora