3^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Metepec, Puebla, 1989
Primer día

1. Considere un triángulo ABC en el que la longitud AB es igual a 5, las medianas por A y por B son perpendiculares entre sí y el área es 18. Halle las longitudes de los lados BC y AC.

2. Encuentre dos enteros positivos a y b tales que, b^2 sea múltiplo de a, a^3 sea múltiplo de b^2, b^4 sea múltiplo de a^3, a^5 sea múltiplo de b^4, pero b^6 no sea múltiplo de a^5.

3. Pruebe que no existe un entero positivo de 1989 cifras que tenga al menos tres de ellas iguales a 5 y tal que la suma de todas sus cifras sea igual al producto de las mismas.

Segundo día

4. Encuentre el entero positivo más pequeño n tal que si su expansión decimal es $n = a_m a_{m-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ y si r es el número cuya expansión decimal es $r = a_1 a_0 a_m a_{m-1} \ldots a_2 0$, entonces r es el doble de n.

5. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos círculos tangentes de radio 1 dentro de un círculo $\mathcal{C}$ de radio 2. Sea $\mathcal{C}_3$ un círculo dentro de $\mathcal{C}$ tangente a cada uno de los círculos $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Sea $\mathcal{C}_4$ un círculo dentro de $\mathcal{C}$ tangente a $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_3$. Demuestre que los centros de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ son los vértices de un rectángulo.

6. Siguiendo las líneas de la figura, ¿cuántos caminos hay para ir del punto A al punto B que no pasen dos veces por el mismo punto y que solo avancen hacia abajo y hacia los lados pero no hacia arriba.