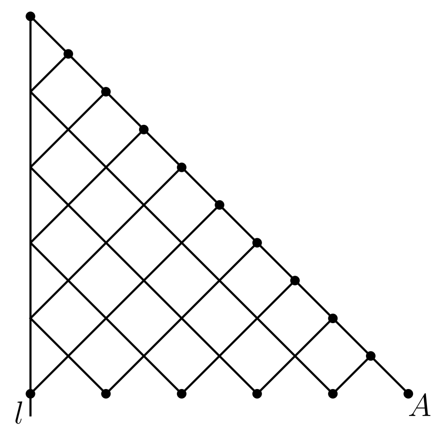
4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Guanajuato, Guanajuato, 1990

Primer día

1. Encuentre el total de caminos que hay del punto A a la línea l en la red de la figura, si en un camino solo está permitido ir hacia la izquierda.



2. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en B y sea H el punto de intersección del lado AC y la altura por B. Llamemos r, r_1 y r_2 a los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos ABC, ABH y HBC, respectivamente. Encuentre una igualdad que relacione a r, r_1 y r_2.

3. Pruebe que $n^{n-1} - 1$ es divisible entre $(n-1)^2$ para todo entero $n \geq 2$.

Segundo día

4. Considere las 27 fichas de dominó que quedan quitando la blanca-blanca. Tomando en cuenta los puntos que hay en una ficha, a cada ficha le corresponde un número racional menor o igual que uno. ¿Cuál es la suma de todos estos números?

5. Si P_1, P_2,..., P_{19} son 19 puntos del plano con coordenadas enteras tales que cada tres de ellos no son colineales, demuestre que hay tres de ellos con la propiedad de que su baricentro (punto de intersección de las medianas de un triángulo), también tiene coordenadas enteras.

6. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Sea l cualquier línea que pase por B y que corte al lado AC en un punto E. Sea F el punto medio de EC, G el punto medio de CB y H el pie de la altura de C, en AB, en el triángulo ABC. Si I denota el circuncentro del triángulo AEH (punto de intersección de las mediatrices de los lados), pruebe que los triángulos IGF y ABC son semejantes.