8^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Guadalajara, Jalisco, 1994

Primer día

1. La colección infinita de números 1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17,... se ha formado de la siguiente manera: Se coloca primero el primer impar (1), luego los siguientes dos pares (2, 4), después los siguientes tres impares (5, 7, 9), luego los cuatro pares siguientes al último impar que se colocó y así sucesivamente. Encuentre el término de la secuencia más cercano a 1994.

2. Los doce números de un reloj se desprendieron y al colocarlos nuevamente se cometieron algunos errores. Demuestre que en la nueva colocación hay un número que al sumarle los dos números que quedaron a sus lados se obtiene un resultado mayor o igual a 21.

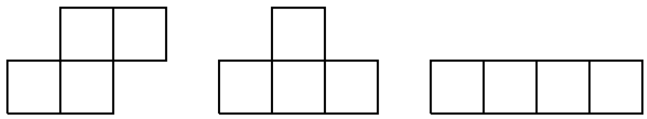
3. Considere un paralelogramo $ABCD$ (con AB paralela a CD y BC paralela a DA), sobre la prolongación del lado AB encuentre un punto E, de manera que $BE = BC$ (y con B entre A y E). Por E, trace una perpendicular a la línea AB, esta se encontrará en un punto F con la línea que pasa por C y es perpendicular a la diagonal BD. Muestre que AF divide en dos ángulos iguales al ángulo DAB.

Segundo día

4. Un matemático caprichoso escribe un libro que tiene páginas de la 2 a la 400 y que debe ser leído de la siguiente manera: Primero deberán leerse todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con 400 (por suerte, estas se leen en orden normal, de menor a mayor). Una vez leídas estas, se toma el último número de las que no se han leído (en este caso 399) y entonces se leen todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con él y que no se hayan leído antes. Este proceso (tomar el último número de las que no se han leído y leer las páginas cuyo número no sea primo relativo con él y que no se hayan leído antes) continúa hasta terminar de leer el libro. ¿Cuál es el número de la última página que se debe leer?

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo (cada uno de sus ángulos es menor que 180°) y considere los pies de las alturas de los cuatro triángulos que se pueden formar con los vértices A, B, C y D. Demuestre que no importa que cuadrilátero convexo se tome, alguno de estos 12 puntos se encuentra sobre un lado del cuadrilátero.

6. Sea C una cuadrícula de 10×10. Considere piezas de las siguientes formas:



b c a

donde en estas piezas, cada cuadrado es de 1×1. Demuestre que:

(I) C no se puede cubrir completamebte con 25 piezas de la forma (a),

(II) C no se puede cubrir completamebte con 25 piezas de la forma (b),

(III) C no se puede cubrir completamebte con 25 piezas de la forma (c).