

12<sup>a</sup> Olimpiada Mexicana de Matemáticas  
Concurso Nacional

Querétaro, Querétaro, 1998  
Primer día

1. Un número es suertudo si al sumar los cuadrados de sus cifras y repetir esta operación suficientes veces obtenemos el número 1. Por ejemplo, 1900 es suertudo, ya que  $1900 \rightarrow 82 \rightarrow 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1$ . Encuentre una infinidad de parejas de enteros consecutivos, donde ambos números sean suertudos.
2. Dos rayos  $l$  y  $m$  parten de un mismo punto formando un ángulo  $\alpha$ , sea  $P$  un punto en  $l$ . Para cada circunferencia  $C$  tangente a  $l$  en  $P$  que corte a  $m$  en puntos  $Q$  y  $R$ , sea  $T$  el punto donde la bisectriz del ángulo  $QPR$  corta a  $C$ . Describa la figura geométrica que forman los puntos  $T$ , justifique su respuesta.
3. Cada uno de los lados y las diagonales de un octágono regular se pintan de rojo o de negro. Demuestre que hay al menos siete triángulos cuyos vértices son vértices del octágono y sus tres lados son del mismo color.

Segundo día

4. Encuentre todos los enteros que se escriben como  $\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{9}{a_9}$ , donde  $a_1, a_2, \dots, a_9$  son dígitos distintos de cero que pueden repetirse.
5. Sean  $B$  y  $C$  dos puntos de una circunferencia,  $AB$  y  $AC$  las tangentes desde  $A$ . Sea  $Q$  un punto del segmento  $AC$  y  $P$  la intersección de  $BQ$  con la circunferencia. La paralela a  $AB$  por  $Q$  corta a  $BC$  en  $J$ . Demuestre que  $PJ$  es paralelo a  $AC$  si y sólo si  $BC^2 = AC \cdot CQ$ .
6. Un plano en el espacio es equidistante a un conjunto de puntos si la distancia de cada punto al plano es la misma. ¿Cuál es el mayor número de planos equidistantes a 5 puntos de los cuales no hay 4 en un mismo plano?