19^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Campeche, Campeche, 2005

Primer día

1. Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC, y sea P un punto cualquiera sobre el segmento BC ($P \neq B$ y $P \neq C$). Supón que la circunferencia circunscrita al triángulo BPO corta al segmento AB en R ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al triángulo COP corta al segmento CA en el punto Q ($Q \neq C$ y $Q \neq A$).

   (I) Considera el triángulo PQR; muestra que que es semejante al triángulo ABC y que su ortocentro es O.

   (II) Muestra que las circunferencias circunscritas a los triángulos BPO, COP y PQR son todas del mismo tamaño.

2. Dadas varias cuadrículas del mismo tamaño con números escritos en sus casillas, su *suma* se efectúa casilla a casilla, por ejemplo:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 2 \\ \hline 6 & 5 \\ \hline\end{array}$$

   Dado un entero positivo N, diremos que una cuadrícula es N-*balanceada* si tiene números enteros escritos en sus casillas y si la diferencia entre los números escritos en cualesquiera dos casillas que comparten un lado es menor o igual que N.

   (I) Muestra que toda cuadrícula $2n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 2 cuadrículas n-balanceadas.

   (II) Muestra que toda cuadrícula $3n$-balanceada (de cualquier tamaño) se puede escribir como suma de 3 cuadrículas n-balanceadas.

3. Determina todas las parejas (a, b) de enteros distintos de cero para las cuales es posible encontrar un entero positivo x primo relativo con b y un entero cualquiera y, tales que en la siguiente lista hay una infinidad de números enteros:

$$\frac{a+xy}{b}, \frac{a+xy^2}{b^2}, \frac{a+xy^3}{b^3}, \ldots, \frac{a+xy^n}{b^n}, \ldots$$

Segundo día

4. Decimos que una lista de números a_1, a_2,..., a_m contiene una *terna aritmética* a_i, a_j, a_k si $i < j < k$ y $2a_j = a_i + a_k$. Por ejemplo, 8, 1, 5, 2, 7 tiene una terna aritmética (8, 5 y 2) pero 8, 1, 2, 5, 7 no.

   Sea n un entero positivo. Muestra que los números 1, 2,..., n se pueden reordenar en una lista que no contenga ternas aritméticas.

5. Sea N un entero mayor que 1. En cierta baraja de N^3 cartas, cada carta está pintada de uno de N colores distintos, tiene dibujada una de N posibles figuras y tiene escrito un número entero del 1 al N (no hay dos cartas idénticas). Una colección de cartas de la baraja se llama *completa* si tiene cartas de todos los colores, o si entre sus cartas aparecen todas las figuras o todos los números.

   ¿Cuántas colecciones no completas tienen la propiedad de que, al añadir cualquier otra carta de la baraja, ya se vuelven completas?

6. Sea ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D sobre BC. Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$. Por E traza l la recta paralela a AD y considera un punto P sobre l y dentro del triángulo. Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB. Muestra que $BF = CG$.