20^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Zacatecas, Zacatecas, 2006

Primer día

1. Sea ab un número de dos dígitos. Un entero n es *pariente* de ab si:

   - el dígito de las unidades de n también es b.
   - los otros dígitos de n son distintos de cero y suman a.

   Por ejemplo, los parientes de 31 son 31, 121, 211 y 1111.

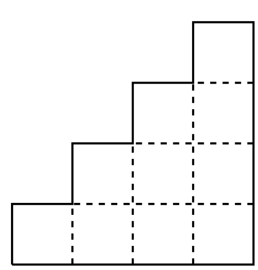
   Encuentra todos los números de dos dígitos que dividen a todos sus parientes.

2. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A, tal que $AB < AC$. Sea M el punto medio de BC y D la intersección de AC con la perpendicular a BC que pasa por M. Sea E la intersección de la paralela a AC que pasa por M con la perpendicular a BD que pasa por B. Demuestra que los triángulos AEM y MCA son semejantes si y solo si $\angle ABC = 60°$.

3. Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar todos los números 1, 2, 3,..., $2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

Segundo día

4. ¿Para qué enteros positivos n puede cubrirse una escalera como la de la figura (pero con n escalones en vez de 4) con n cuadrados de lados enteros, no necesariamente del mismo tamaño, sin que estos cuadrados se encimen y sin que sobresalgan del borde de la figura?



5. Sea ABC un triángulo acutángulo y, AD, BE y CF sus alturas. La circunferencia con diámetro AD corta a los lados AB y AC en M y N, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de AD con EF y MN, respectivamente. Demuestra que Q es el punto medio de PD.

6. Sea n la suma de los dígitos de un entero positivo A. Decimos que A es *surtido* si cada uno de los enteros 1, 2,..., n es suma de dígitos de A.

   a) Demuestra que si 1, 2,..., 8 son sumas de dígitos de un entero A entonces A es surtido.

   b) Si 1, 2,..., 7 son sumas de dígitos de un entero A. ¿Es A necesariamente surtido?