26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Guanajuato, Guanajuato, 2012
Primer día

1. Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en P. Considera un punto Q sobre ℓ, distinto de P, y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ intersecta a $\mathcal{C}_1$ en S y la recta PS intersecta a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

2. Sea $n \geq 4$ un número par. Considera una cuadrícula de $n \times n$. Dos celdas (cuadraditos de 1×1) son *vecinas* si comparten un lado, si están en extremos opuestos de un mismo renglón o si están en extremos opuestos de una misma columna. De esta forma, toda celda en la cuadrícula tiene exactamente cuatro celdas vecinas.

   En cada celda está escrito un número del **1** al **4** de acuerdo con las siguientes reglas:

   - Si en una celda está escrito un **2** entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un **1**.
   - Si en una celda está escrito un **3** entonces en tres o más celdas vecinas está escrito un **1**.
   - Si en una celda está escrito un **4** entonces en las cuatro celdas vecinas está escrito un **1**.

   Entre los acomodos que cumplan las condiciones anteriores, ¿cual el máximo número que se puede obtener sumando los números escritos en todas las celdas?

3. Muestra que entre cualesquiera 14 números enteros consecutivos siempre hay 6 números tales que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.

Segundo día

4. A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el proceso aplicado al 938 es 102, ya que $\frac{(938-(9+3+8))}{9} = 102$. Aplicado dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado tres veces se llega a 1, y aplicado cuatro veces se llega al 0.

   Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al cero, lo llamamos la *casa* de n. ¿ Cuántos númerosmenores que 26 mil tienen la misma casa que el 2012?

5. Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero de 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con # en la siguiente figura, entonces

   - Si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\times$.
   - Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\circ$.

		$\times$		$\circ$		
	$\circ$				$\times$	
			#			
	$\times$				$\circ$	
		$\circ$		$\times$		

   Diremos que dos ranas (de cualquier color) *se pueden encontrar en una casilla* si ambas pueden llegar hasta ella saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos.

   (a) Muestra que si ponemos 6 ranas (de cualquier color), entonces hay al menos 2 que se pueden encontrar.

   (b) ¿Para qué valores de k es posible poner una rana roja y una rana verde de manera que haya exactamente k casillas en las que estas ranas se pueden encontrar?

6. Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo $\mathcal{C}$. Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a $\mathcal{C}$ en D, E y F, respectivamente; y la recta MH corta a $\mathcal{C}$ en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.