35° Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Virtual, 9 de noviembre del 2021
Primer día

Problema 1.
Los números positivos y distintos a_1, a_2, a_3 son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, y de la misma manera, los números positivos y distintos b_1, b_2, b_3 son tres términos consecutivos de una progresión aritmética. ¿Es posible usar tres segmentos con longitudes a_1, a_2, a_3 como bases y otros tres segmentos con longitudes b_1, b_2, b_3 como alturas (en algún orden), para construir tres rectángulos con la misma área?

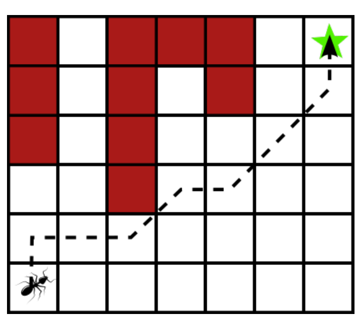
Problema 2.
Sea ABC un triángulo tal que $\angle ACB > 90°$ y sea D el punto de la recta BC tal que AD es perpendicular a BC. Considera Γ la circunferencia de diámetro BC. Una recta que pasa por D es tangente a la circunferencia Γ en P, corta al lado AC en M (quedando M entre A y C) y corta al lado AB en N.
Demuestra que M es punto medio de DP si, y solo si N es punto medio de AB.

Problema 3.
Sean $m, n \geq 2$ dos enteros. En una cuadrícula de $m \times n$, una hormiga empieza en el cuadrito inferior izquierdo y quiere caminar al cuadrito superior derecho. Cada *paso* que da la hormiga debe ser a un cuadrito adyacente, de acuerdo a las siguientes posibilidades: $\uparrow$, $\rightarrow$ y $\nearrow$. Sin embargo, un malvado mago ha dejado caer lava desde arriba y ha destruido algunos de los cuadritos, de forma tal que:

- Si un cuadrito está destruido, entonces todos los cuadritos superiores a él también están destruidos.
- El número de cuadritos destruidos es mayor o igual a 0.
- Quedan suficientes cuadritos sin destruir para que la hormiga pueda llegar a la meta.

Sea P el número de caminos de longitud par que puede seguir la hormiga. Sea I el número de caminos de longitud impar que puede seguir la hormiga. Encuentra los posibles valores de $P - I$.

Nota. La longitud de un camino es el número de pasos que da la hormiga. Por ejemplo, se muestra un posible camino de longitud 8 en la figura de 6×7 siguiente, en la que los cuadritos destruidos están sombreados y la meta está indicada con una estrella.



Cada problema vale 7 puntos y tienes una hora para preguntas.
Tiempo máximo del examen: 4.5 horas.

35° Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Concurso Nacional

Virtual, 10 de noviembre del 2021
Segundo día

Problema 4.
Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno con $\angle BAC = 60°$ y ortocentro H. Sean ω_b la circunferencia que pasa por H y es tangente a AB en B, y ω_c la circunferencia que pasa por H y es tangente a AC en C.

(a) Prueba que ω_b y ω_c solamente tienen a H como punto común.

(b) Prueba que la recta que pasa por H y el circuncentro O del triángulo ABC, es una tangente común a ω_b y ω_c.

Nota: el ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus tres alturas, mientras que el circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

Problema 5.
Para cada entero $n > 0$ con expansión decimal $\overline{a_1a_2\ldots a_k}$ definimos a $s(n)$ como sigue:

- Si k es par, $s(n) = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + \cdots + \overline{a_{k-1}a_k}$
- Si k es impar, $s(n) = a_1 + \overline{a_2a_3} + \cdots + \overline{a_{k-1}a_k}$

Por ejemplo, si $n = 123$ entonces $s(n) = 1 + 23 = 24$ y si $n = 2021$ entonces $s(n) = 20 + 21 = 41$.

Decimos que n es *digital* si n es múltiplo de $s(n)$. Muestra que entre cualesquiera 198 enteros positivos consecutivos, todos ellos menores a 2000021, hay uno de ellos que es digital.

Problema 6.
Determina todos los conjuntos no vacíos $C_1, C_2, C_3, \ldots$, tales que cada uno de ellos tienen un número finito de elementos y todos sus elementos son enteros positivos, con la siguiente propiedad: Para cualesquiera enteros positivos m y n, la cantidad de enteros positivos en el conjunto C_m más la cantidad de enteros positivos en el conjunto C_n es igual a la suma de los enteros positivos en el conjunto C_{m+n}.

Nota. Al denotar por $|C_k|$ la cantidad de elementos del conjunto C_k y por S_k a la suma de los elementos del conjunto C_k, la condición del problema es que para m, n enteros positivos se cumple

$$|C_n| + |C_m| = S_{m+n}.$$

Cada problema vale 7 puntos y tienes una hora para preguntas.
Tiempo máximo del examen: 4.5 horas.