Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

15 - 18 de junio del 2017

Prueba por Equipos
Nivel 2

Estado: ______________________________

Integrantes:

____

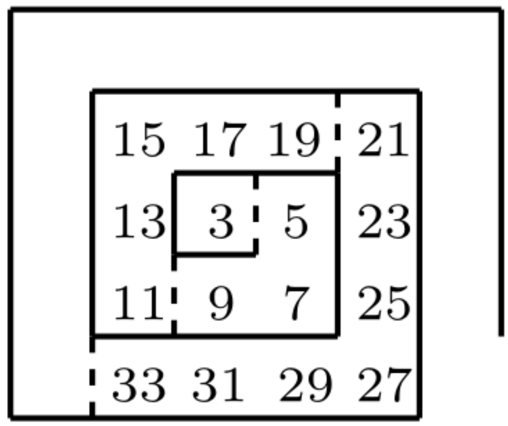
____

____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5 y 7 sólo se tomará en cuenta el resultado final, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos sólo si todas las respuestas correctas están escritas y sólo ellas.

Los problemas 2, 4, 6 y 8 requieres una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es de 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos uno problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos 2 problemas.

Problema 1. Se colocan los números impares 3, 5, 7, 9, . . . , siguiendo una espiral como se mues- tra en la figura. El número 3 quedo en un primer cuadrado de 1×1, al poner el 9 se cerró un segundo cuadrado de 2×2, un tercer cuadrado se cerró al poner el 19. ¿Qué número cierra el cuadrado número 18?



R:

Problema 2. Los nadadores Omar, Mario, Miguel, Edgar y Beto van a competir en una carrera de 100 metros libres en una alberca de 5 carriles. Se acomodan en los carriles de forma que:

1. Beto no nada al lado de Mario, ni de Edgar.
2. Omar nada en un extremo.
3. Miguel nada en medio de dos personas y ninguna de ellas es Mario.
4. Edgar no está en los carriles 2, 3 ni 5.

Indica en qué carril está cada uno de los competidores.

Problema 3. Sean $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ y $A_1A_2B_3\ldots B_nB_{n+1}$ dos polígonos regulares con n y $n+1$ lados, respectivamente, tales que comparten el lado A_1A_2. Además, el polígono $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ es interno al polígono $A_1A_2B_3\ldots B_nB_{n+1}$. Encuentra todos los valores de $n>3$ tales que $\angle A_nB_{n+1}B_n = \frac{\angle A_1B_{n+1}B_n}{3}$.

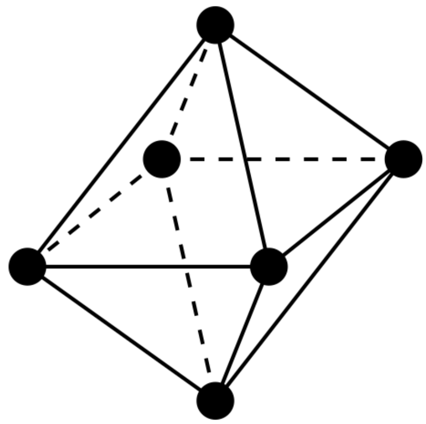
R:

Problema 4. El número de la casa de Joaquín es el 932. Joaquín se da cuenta que este número cumple las siguientes condiciones:

1. Todos los dígitos son positivos y aparecen en orden decreciente ($9 > 3 > 2 > 0$).
2. La suma de 932 con el número que se obtiene invirtiendo el orden de los dígitos es un número que tiene todos sus dígitos impares ($932 + 239 = 1171$).

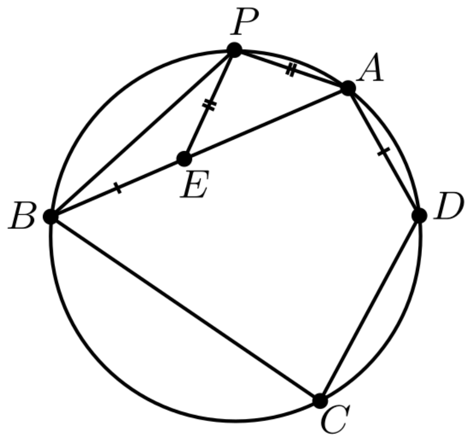
¿Cuáles números de 3 dígitos, incluyendo el 932, tienen estas dos propiedades?

Problema 5. Coloca los números del 1 al 8 en las caras del octaedro regular, de manera que se cumpla la siguiente condición: si en cada vértice del octaedro se escribe el producto de los números que están en las 4 caras que lo tocan, entonces la suma de cada pareja de números escritos en vértices opuestos es la misma.



R:

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con sus vértices sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ y tal que $AB > AD$. Sea E un punto sobre el lado AB tal que $BE = AD$. Sea P un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ con $AP = PE$. Muestra que $\angle DCP = \angle PCB$.



Problema 7. Para cada entero positivo n, considera los enteros positivos a y b tales que: a y b no tiene divisores positivos en común diferentes de 1, $ab = n$ y $a + b$ es mínimo (esto último quiere decir que si $n = ab = cd$, entonces $a + b \leq c + d$.) Definimos $f(n) = |s(a) - s(b)|$ donde $s(j)$ representa la suma de los dígitos de j. Calcula la suma $f(1^2 + 1) + f(2^2 + 2) + \cdots + f(2017^2 + 2017)$.

R:

Problema 8. Juan escribe un número, entre 1 y 1000 (inclusive). Él reta a su hermano Mario a adivinar qué número escribió. En cada paso, Mario puede hacer preguntas a Juan de la siguiente forma: ¿El número que escribiste es **igual**, **mayor** o **menor** a x?, donde x es cualquier número entre 1 y 1000 que Mario puede escoger en cada paso. Juan deberá responder esta pregunta con la verdad. Mario gana cuando Juan le responde que el número que escribió es igual al número x por el cual preguntó Mario. Encuentra una estrategia en la cual Mario tarde a lo más 9 preguntas en ganar, independientemente de qué número escriba Juan.