Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

15 - 18 de junio del 2017

Prueba por Equipos
Nivel 3

Estado: ______________________________

Integrantes:

____

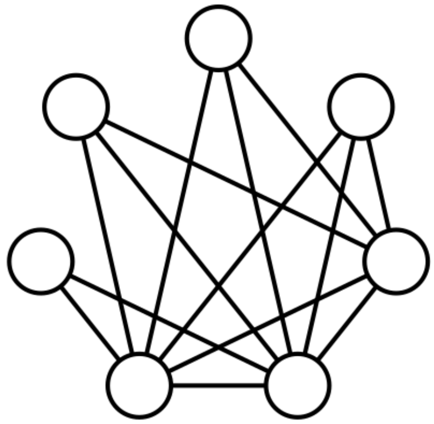
____

____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5 y 7 sólo se tomará en cuenta el resultado final, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos sólo si todas las respuestas correctas están escritas y sólo ellas.

Los problemas 2, 4, 6 y 8 requieres una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es de 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos uno problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos 2 problemas.

Problema 1. Coloca los números del 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dentro de los círculos de la siguiente figura, de manera que si dos círculos están conectados con un segmento los números en esos círculos no tienen divisores en común distintos de 1.



R:

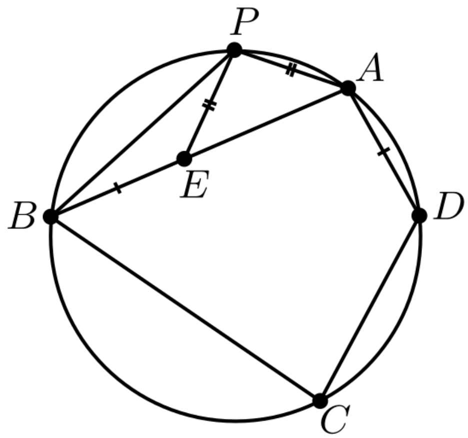
Problema 2. Encuentra todas las ternas de enteros positivos (x, y, z) tales que

$$x^3 + 3x^2 + z^2 + 2x + 3y = 2018.$$

Problema 3. Sean $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ y $A_1A_2B_3\ldots B_nB_{n+1}$ dos polígonos regulares con n y $n+1$ lados, respectivamente, tales que comparten el lado A_1A_2. Además, el polígono $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ es interno al polígono $A_1A_2B_3\ldots B_nB_{n+1}$. Encuentra todos los valores de $n>3$ tales que $\angle A_nB_{n+1}B_n = \frac{\angle A_1B_{n+1}B_n}{3}$.

R:

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero con sus vértices sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ y tal que $AB > AD$. Sea E un punto sobre el lado AB tal que $BE = AD$. Sea P un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ con $AP = PE$. Muestra que $\angle DCP = \angle PCB$.



Problema 5. Para cada entero positivo n, considera los enteros positivos a y b tales que: a y b no tiene divisores positivos en común diferentes de 1, $ab = n$ y $a + b$ es mínimo (esto último quiere decir que si $n = ab = cd$, entonces $a + b \leq c + d$.) Definimos $f(n) = |s(a) - s(b)|$ donde $s(j)$ representa la suma de los dígitos de j. Calcula la suma $f(1^2 + 1) + f(2^2 + 2) + \cdots + f(2017^2 + 2017)$.

R:

Problema 6. Sea P un punto en el plano. Se dibujan n circunferencias de radio 1 tales que P es un punto común a ellas. Encuentra el máximo n de tal manera que no suceda que el centro de alguna de las circunferencias quede en el interior o en el borde de otra de las circunferencias.

Problema 7. Para cada entero positivo n que no termine en cero, sea n^* el resultado de escribir los dígitos de n en orden inverso. Por ejemplo $2017^* = 7102$. Sea a un entero positivo de menos de 8 dígitos tal que a^* es distinto de a y denotemos por D al máximo común divisor de los números a y a^*. Se sabe que D es mayor a 2017 y lo dividen al menos tres primos distintos. Halla un valor posible de a.

R:

Problema 8. Un entero positivo n es bueno si el exponente del 13 en la factorización de primos de $n!$ es distinto de cero y divisible por 13. Encuentra todos los enteros positivos n que sean buenos pero que ningún número menor a $n - 13$ lo sea.