Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

15 - 18 de junio del 2017

Examen individual
Nivel 3

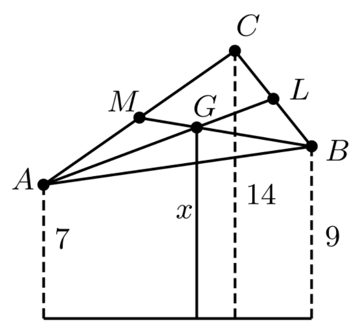
Instrucciones: EL examen consta de dos partes. La parte A consta de 12 problemas con un valor de 5 puntos cada uno. En estos problemas sólo se toma en cuenta la respuesta final, que debe ser claramente escrita en el espacio correspondiente a cada problema, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 5 puntos sólo si todas las respuestas correctas están escritas y sólo ellas. La parte B consta de 3 problemas de redacción libre y con un valor de 20 puntos cada uno. En estos problemas es posible acumular puntos parciales. Las figuras mostradas podrían no estar a escala. No está permitido el uso de calculadoras, transportadores y aparatos electrónicos. La duración del examen es de **2 horas**.

PARTE A

Problema 1. El número 10! tiene 270 divisores positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar uno de ellos al azar, este divisor sea impar?

R:

Problema 2. Las distancias desde los tres vértices A, B, C de un triángulo ABC a una recta dada miden 7 cm, 9 cm y 14 cm, respectivamente. Sean L y M los puntos medios de BC y CA, respectivamente, y sea G el punto de intersección de AL y BM . Calcula la distancia, en centímetros, desde G a dicha recta.



R:

Problema 3. Se escriben en fila los números naturales a partir del 50, excluyendo aquellos que tienen alguna cifra 3: 50515254555657585960616264 . . . ¿Qué cifra queda en el lugar 2017?

R:

Problema 4. Encuentra el máximo común divisor de 111444444 y 444111111.

R:

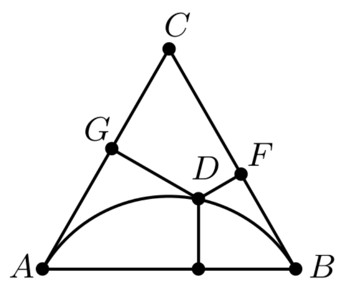
Problema 5. Si se lanzan 3 dados, calcula la probabilidad de que el producto de los números que quedaron boca arriba tenga exactamente dos divisores positivos.

R:

Problema 6. Al realizar la multiplicación $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+2017)$, ¿Cuál es el coeficiente de x^{2016}?

R:

Problema 7. En la siguiente figura, D es un punto sobre el arco AB, los segmentos CA y CB son tangentes al arco en los puntos A y B, respectivamente, y los puntos E, F y G son los pies de las perpendiculares desde D a los lados AD, BC y CA, respectivamente. Si $DG = 9\,\text{cm}$ y $DF = 4\,\text{cm}$, calcula, en cm, la longitud DE.



R:

Problema 8. Encuentra todos los enteros positivos x, que cumplan la ecuación $x^3 - 2017x - 360 = 0$.

R:

Problema 9. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto 1, 2, 3, ..., 2017. Para cada subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ se denota por $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ a la suma de todos los elementos de $\mathcal{A}$. Calcula el promedio de todos losnúmeros $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

R:

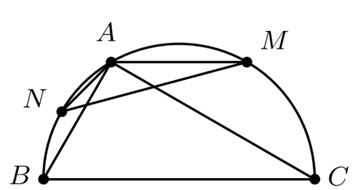
Problema 10. Encuentra todos los números de tres cifras que sean cuadrados perfectos y tales que el número que se obtiene al invertir el orden de sus cifras también sea un cuadrado perfecto.

R:

Problema 11. En un autobús van seis pasajeros, cada uno lleva un boleto con número, los 6 números son distintos. Además los números de los boletos cumplen que ninguno es múltiplo de 5 y para cada número de boleto hay exactamente otro, de los cinco restantes, de manera que ese par de números no tiene divisores positivos en común, aparte del 1. ¿Cuál es el número más pequeño que se puede obtener al multiplicar los números de los seis boletos?

R:

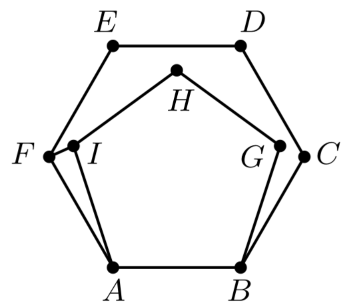
Problema 12. En el triángulo ABC, el segmento AB mide $1\,\text{cm}$, $\angle BAC = 90°$ y $\angle CBA = 60°$. Además M y N son los puntos medios de los arcos $\frown AC$ y $\frown AB$, respectivamente, de la semicircunferencia. Calcula, en cm^2 , el valor del área del triángulo ANM.



R:

PARTE B

Problema 13. En la siguiente figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular y $ABGHI$ es un pentágono regular. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle IFE$?



Problema 14. Los números enteros positivos a, b y c son distintos y satisfacen que

$$a \mid b + c + bc, \quad b \mid c + a + ca, \quad c \mid a + b + ab.$$

Prueba que al menos uno de los números a, b, c no es primo.

Problema 15. El número natural M tiene exactamente 6 divisores positivos cuya suma es 3500. Encuentra todos los valores posibles de M.