Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

9 - 12 de junio del 2018

Prueba por Equipos
Nivel 3

Estado: ______________________________

Integrantes:

____

____

____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5 y 7 sólo se tomará en cuenta el resultado final, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos sólo si todas las respuestas correctas están escritas y sólo ellas.

Los problemas 2, 4, 6 y 8 requieres una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es de 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera (I) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos uno problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (II) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (III) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos 2 problemas.

Problema 1. Sea $A = \{2, 5, 8, 11, \ldots, 2018\}$, cada número, a partir del segundo, es el anterior más 3. Determina el mínimo valor k tal que si escogemos k números del conjunto A, necesariamente hay dos distintos cuya suma sea 2020.

R:

Problema 2. Todos los números impares se dividen en grupos como se indica:

$$\{1\},\ \{3,5\},\ \{7,9,11\},\ \{13,15,17,19\},\ldots.$$

¿Cuál es la suma de los elementos del décimo grupo?

Problema 3. Un triángulo ABC con vértices sobre una circunferencia de centro O tiene la siguiente propiedad: si O, C' son simétricos con respecto a C, se cumple que $\angle CC'A = \angle ABC$. Encuentra el valor (en grados) del ángulo $\angle ABC$.

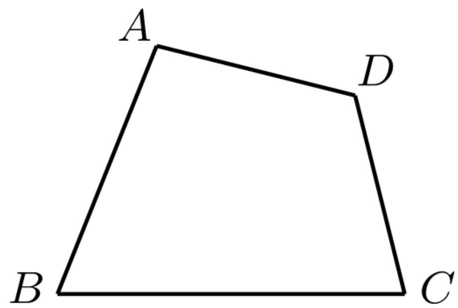
R:

Problema 4. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, r) tales que el número $N = a^2 + (a + r)^2 + (a + 2r)^2 + (a + 3r)^2 + (a + 4r)^2$ tenga todos sus dígitos iguales.

Problema 5. Los números creativos son números de 4 dígitos $abcd$ tales que los números de dos dígitos ab y cd son ambos pares. Además, la suma de sus dígitos es un número primo. Por ejemplo, 2018 es número creativo, ya que $ab = 20$ y $cd = 18$ son números pares de dos dígitos y la suma $2 + 0 + 1 + 8 = 11$ es un número primo. ¿Cuántos números creativos menores o iguales que 2018 hay?

R:

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, como se indica en la figura. Muestra que si los cuatro triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, tienen el mismo perímetro, entonces $ABCD$ es un rectángulo.



Problema 7. Consideramos un tablero de 8×8. El *Batab* es una pieza que puede moverse de una casilla a otra vecina (que comparte un lado). Un *camino del Mayab* es un camino que va de una casilla inicial a una final tal que:

a) Consta exclusivamente de movimientos del Batab.

b) En cada paso se aleja del punto inicial y se acerca al punto final.

Se coloca una ficha verde en una casilla y una ficha naranja en otra distinta, luego se coloca una ficha blanca en una casilla que está dentro de un camino del Mayab que va de la ficha verde a la ficha naranja. Llamamos T al número total de caminos del Mayab que van de la ficha verde a la naranja pasando por la ficha blanca. Encuentra el número total de formas distintas en que se pueden colocar las tres fichas de modo que 49 divida a T.

R:

Problema 8. Los gemelos Adán y Beto van de su casa a la escuela. Adán, corre la mitad del trayecto y camina la otra mitad, mientras que Beto corre la mitad del tiempo y camina la otra mitad del tiempo. Los dos corren a una misma velocidad v_1 y los dos caminan a una misma velocidad v_2. ¿Quién de ellos llega primero? Justifica tu respuesta.