III Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica

Oaxtepec, Morelos, junio 14-17, 2019.

Prueba por Equipos

Nivel III

Estado: _______________________________
Integrantes:
____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final y no se otorgarán puntos parciales, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

Problema 1. Un triángulo acutángulo cumple que sus tres ángulos miden en grados un número entero y la medida del ángulo mayor es seis veces la medida del ángulo menor. Hallar las medidas, en grados, de los ángulos del triángulo.

R:

Problema 2. El primer término de una sucesión es 97. Cada término subsecuente es la suma del dígito de las decenas y el cuadrado del dígito de las unidades del término anterior a él; por ejemplo, el segundo término es $9 + 7^2 = 58$. Encuentra el término 2019 de tal sucesión.

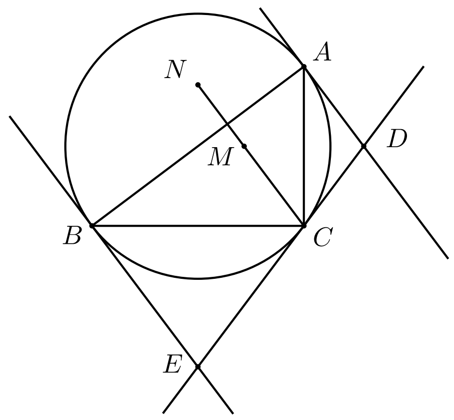
Problema 3. Carlos estaba jugando con los números y los acomodó de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}$$

Empezó a formar caminos uniendo los números 1-2-3-4-5-6-7 mediante segmentos de rectas horizontales o verticales en ese orden y tocando solo una vez cada número. Si continua así, ¿cuántos caminos pudo formar?

R:

Problema 4. Sean ABC un triángulo con circuncírculo Γ, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 las tangentes a Γ en A, B y C respectivamente. Denota por D la intersección de ℓ_1 y ℓ_3 y por E la intersección de ℓ_2 y ℓ_3. Sean M el reflejado de D con respecto a la recta AC y N el reflejado de E con respecto a la recta BC. Muestra que si M, N y C están alineados, entonces $\angle ACB = 90°$.

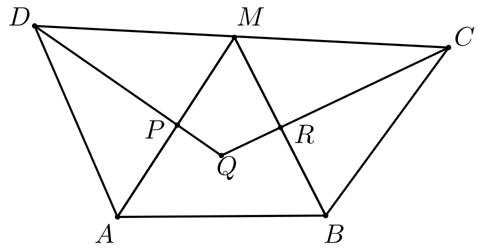


Problema 5. En una carrera de atletismo los corredores A, B y C fueron los primeros en llegar a la meta. Cuando A llegó a la meta, los corredores B y C se encontraban a 2 metros y a 2.98 metros de A, respectivamente. Cuando llego B a la meta el corredor C estaba a 1 metro de la meta. Suponga que cada una de las velocidades de los corredores son constantes durante la carrera. ¿De cuántos metros es la carrera?

R:

Problema 6. Una *tripleta Eliana* consiste en tres números enteros positivos distintos que cumplen que la suma de dos de ellos es divisible entre el tercero de ellos. Encuentra el mayor valor que puede tener la suma de los elementos de una tripleta Eliana, teniendo la restricción de que el producto de sus elementos es a lo más 2019.

Problema 7. La figura $ABCD$ es un cuadrilátero. Las rectas AM, BM, CQ y DQ son bisectrices de los ángulos interiores en los vértices A, B, C y D, respectivamente y de manera que M se encuentre en DC. Sea P la intersección de AM con DQ y sea R la intersección de BM con CQ.



Si el cuadrilátero $PQRM$ es un rectángulo, encuentra el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{AB + CD}{BC + DA}.$$

R:

Problema 8. Muestra que no importa como se acomoden todos los números $1, 2, \ldots, 25$ en los cuadritos de un tablero de 5×5, siempre hay un subtablero de 2×2 que satisface que los cuatro números de este subtablero suman más de 41.