IV Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica

Virtual, octubre 16-17, 2020.

Prueba por Equipos

Nivel III

Estado: _______________________________
Integrantes:

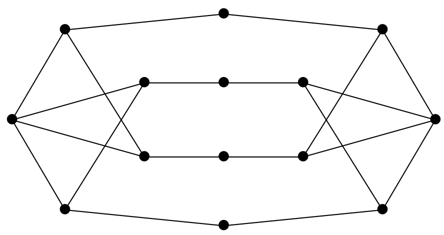
____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final y no se otorgarán puntos parciales, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

Problema 1. Daniela está parada en el vértice A del cuadrado $ABCD$. Va a lanzar una moneda: si cae águila, avanzará al siguiente vértice en el sentido de las manecillas del reloj; si cae sol, avanzará al vértice anterior en el sentido de las manecillas del reloj. Si Daniela lanza la moneda un total de 10 veces y tras el último lanzamiento Daniela cae en el vértice A, ¿de cuántas formas pudo haber sucedido esto?

R:

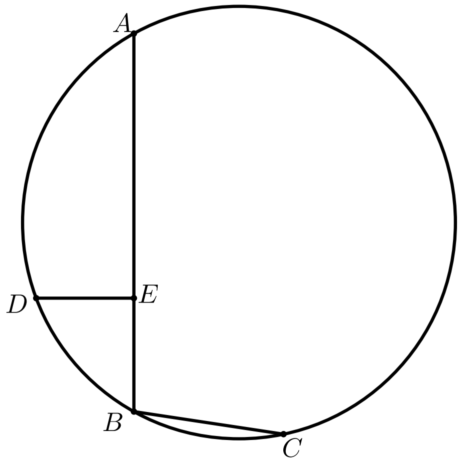
Problema 2. La siguiente figura consta de 14 vértices y 20 segmentos. Se dice que dos vértices son vecinos si hay una línea que empieza en uno de ellos y acaba en otro. Raúl quiere elegir algunos vértices de manera que entre los vértices que eligió y sus vecinos, estén elegidos todos los vértices. ¿Cuál es la mínima cantidad de vértices que debe elegir Raúl para lograr esto?



Problema 3. Encuentra la suma de todos los números enteros n de tres dígitos distintos, para los cuales la suma de todos los números de dos dígitos que se pueden formar con los dígitos de n sea igual al doble de n. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces los números de dos dígitos distintos que se pueden formar con los dígitos de n son 12, 13, 21, 23, 31 y 32.

R:

Problema 4. En la siguiente figura, los puntos A, D, B y C están sobre una misma circunferencia Γ. El punto E está sobre el segmento AB de tal manera que DE es perpendicular a AB. Si $EB = 3$ cm, $BC = 4$ cm y $AD = DC$, encuentra la medida, en cm, del segmento AE.



Problema 5. Emmanuel tiene un candado con una clave de 4 dígitos, pero se le olvidó la contraseña. Recuerda que todos los dígitos son diferentes, que el número es múltiplo de 45, que tiene exactamente un dígito par y que el número comienza con 9 o 4. Si k es el mínimo número de intentos que requiere para poder asegurar que sabe la clave del candado, ¿cuál es el valor de $100k$?

R:

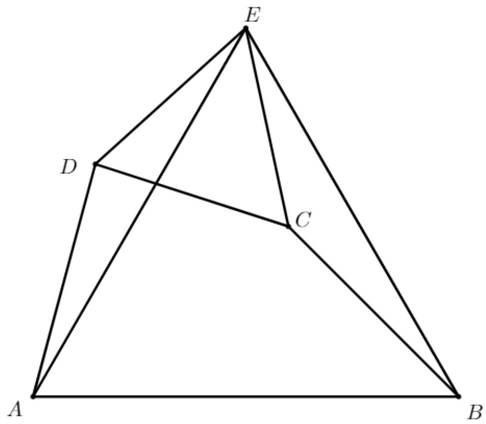
Problema 6. Sean a, b y c números reales que cumplen,

$$a^2 - ab = b^2 - bc = c^2 - ca = 1.$$

Determina el valor numérico de $abc(a + b + c)$.

Problema 7. En el cuadrilátero convexo $ABCD$, se tiene que $\angle BAD + \angle ABC = 120°$, $AD = BC = 5$ cm y $AB = 8$ cm. Además, se construye por fuera del cuadrilátero el triángulo equilátero CDE. Si el área del triángulo ABE es de x cm^2, encuentra el valor de x^2.

Nota: El cuadrilátero $ABCD$ es *convexo* si sus diagonales AC y BD están completamente contenidas en él.



R:

Problema 8. Demuestra que si n es un entero positivo tal que $3n+1$ y $10n+1$ son cuadrados, entonces $29n+11$ no puede ser un número primo.