Examen Individual

NIVEL III

Instrucciones: El examen consta de dos partes. La parte A consta de 12 problemas con un valor de 5 puntos cada uno. En estos problemas solo se toma en cuenta la respuesta final, que debe ser claramente escrita en el espacio correspondiente a cada problema, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 5 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. La parte B consta de 3 problemas de redacción libre y con un valor de 20 puntos cada uno. En estos problemas es posible acumular puntos parciales. Las figuras mostradas, podrían no estar a escala. No está permitido el uso de calculadoras, transportadores y aparatos electrónicos. La duración del examen es de **2 horas.**

PARTE A

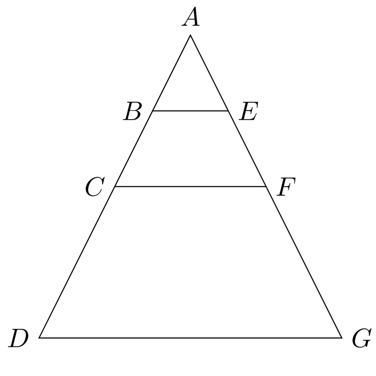
Problema 1. En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hay una moneda. ¿De cuántas maneras se pueden quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado?

R:

Problema 2. Sean a, b y c enteros positivos diferentes tales que su suma y su producto son cuadrados perfectos. Determina el menor valor posible de $abc(a+b+c)$.

R:

Problema 3. En la siguiente figura se sabe que la altura del triángulo ABE es la mitad de la altura del triángulo ACF, y a su vez la altura del triángulo ACF es la mitad de la altura del triángulo ADG. Si el perímetro del triángulo ABE es 7 cm y el perímetro del trapecio $CDGF$ es 22 cm, ¿cuál es el perímetro, en centímetros, del trapecio $BDGE$?



R:

Problema 4. ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos (distintos) se pueden escoger del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ de manera que el producto de los tres números no sea divisible entre 4?

R:

Problema 5. La lista $1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 200$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término a partir del tercero es la suma de los anteriores, es decir,

$$x_3 = 1 + x_2,\ x_4 = 1 + x_2 + x_3,\ x_5 = 1 + x_2 + x_3 + x_4$$

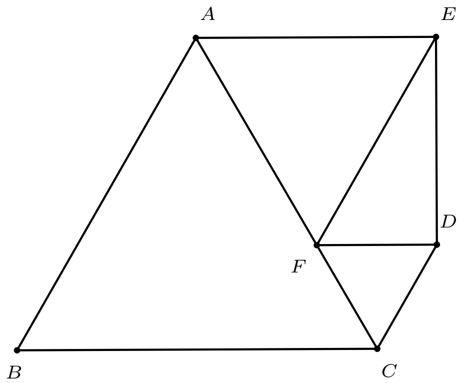
y así sucesivamente. Determina el valor de x_2.

R:

Problema 6. Los números reales distintos a, b, c, d satisfacen que $a + c = b + d$ y $a + b + cd = c + d + ab$. Determina la suma de los posibles valores de $a + c$.

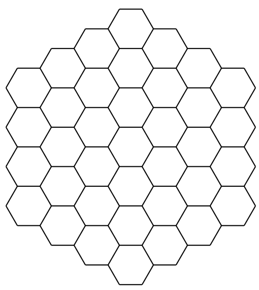
R:

Problema 7. Sean ABC, AFE y CDF triángulos equiláteros como se muestra en la figura cuyas medidas de sus lados son 6 cm, 4 cm y 2 cm, respectivamente. Si el área del pentágono $ABCDE$ es x cm^2, encuentra el valor de x^2.



R:

Problema 8. En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la mayor cantidad de abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?



R:

Problema 9. Sea $x_0 = a$ con a un número entero positivo. Para cada entero $n > 0$ definimos $x_n = 5x_{n-1} + 1$. ¿Cuántos valores de a menores o iguales que 2020 satisfacen que x_k no es divisible entre 9 para todo entero $k \geq 0$?

R:

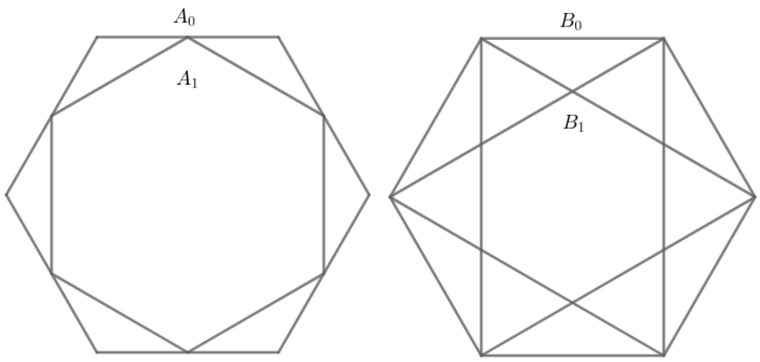
Problema 10. Sea $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Si el producto

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(3)}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{f(100)}\right)$$

puede escribirse como $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros positivos primos relativos, encuentra el valor de $a + b$.

R:

Problema 11. Los hexágonos regulares A_0 y B_0 tienen lados iguales a 1. Para cada entero positivo n, el hexágono regular A_n se construye uniendo los puntos medios de los lados del hexágono regular A_{n-1}. El hexágono regular B_n se construye traslapando dos triángulos equiláteros con vértices de B_{n-1}. En la siguiente figura se muestran los hexágonos regulares A_1 y B_1. La razón del área de A_{2020} entre el área de B_{2020} puede escribirse de la forma $(\frac{a}{b})^c$ donde a, b, c son enteros positivos y a, b son primos relativos. Si c toma el valor máximo posible, encuentra el valor de $\frac{c}{a+b}$.



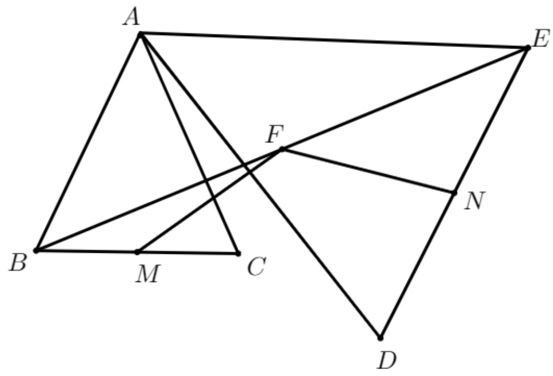
R:

Problema 12. El número de mi casa tiene cuatro dígitos diferentes. Si se suman todos los números que se pueden formar con tres de esos cuatro dígitos, se obtiene un total igual al cuadrado de la suma de esos cuatro dígitos multiplicado por mi edad e igual al número de mi casa multiplicado por $\frac{36}{13}$. Encuentra el cociente del número de mi casa entre mi edad.

R:

PARTE B

Problema 13. Sean ABC y ADE dos triángulos isósceles semejantes entre sí, donde $AB = AC$, $AD = AE$ y $\angle BAD = \angle CAE$. Llamemos M, N y F a los puntos medios de BC, DE y BE, respectivamente. Determina el valor de la razón $\frac{MF}{FN}$.


A
E
F
N
B
M
C
D

Problema 14. Determina todos los enteros a, b y c distintos de cero tales que a sea divisor de $b - c$, b sea divisor de $c - a$ y c sea divisor de $a - b$.

Problema 15. En un $2n$-ágono regular se han marcado sus vértices, sus lados, su centro y las n diagonales que pasan por el centro. Si A y B son dos vértices diametralmente opuestos del $2n-$ágono, ¿de cuántas formas se puede ir de A a B moviéndose sobre las líneas de la figura sin pasar dos veces por el mismo punto?