V Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica

Virtual, junio 17-21, 2021.

Prueba por Equipos

Nivel II

Estado: ______________________________
Integrantes:

____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. En caso de que las respuestas a estos problemas no sean enteras, estas deben ser aproximadas a dos decimales tomando en cuenta los siguientes valores:

$$\pi = 3.14, \qquad \sqrt{2} = 1.41, \qquad \sqrt{3} = 1.73, \qquad \sqrt{5} = 2.23.$$

Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

Problema 1. Un número de 5 dígitos *abcde* es *fósil* si cumple las siguientes condiciones:

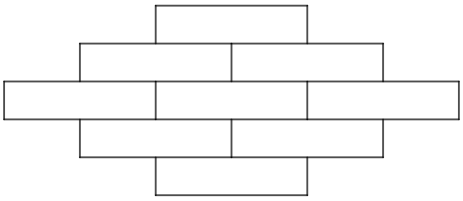
- El número ab es múltiplo de 2.
- El número abc es múltiplo de 3.
- El número $abcd$ es múltiplo de 4.
- El número $abcde$ es múltiplo de 5.

(Por ejemplo, el número 50165 es fósil porque 50 es múltiplo de 2, 501 es múltiplo de 3, 5016 es múltiplo de 4 y 50165 es múltiplo de 5.) ¿Cuántos números fósiles existen?

R:

Problema 2. En el triángulo ABC, se tiene que $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 12$ cm y $BC = 9$ cm. Sea D un punto sobre la hipotenusa AB tal que $AD = 5$ cm. Encuentra el valor de CD^2.

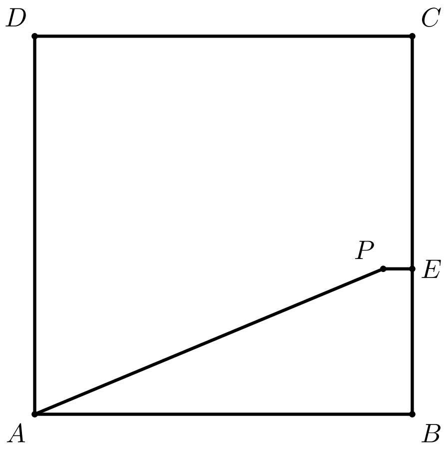
Problema 3. La siguiente figura consiste de 9 rectángulos. ¿De cuántas formas se pueden pintar los rectángulos si se dispone de 4 colores distintos y se quiere que no queden pintados del mismo color dos rectángulos vecinos?



R:

Problema 4. Considera todos los números enteros positivos de 7 dígitos que se forman con los dígitos 1, 2 y 3 de manera que el 3 aparezca exactamente 2 veces. ¿Cuántos de tales enteros son divisibles entre 11?

Problema 5. El lado de un cuadrado $ABCD$ mide 13 cm. El punto P está dentro del cuadrado y E es un punto sobre el lado BC tal que PE es perpendicular a CB y los segmentos PE y PA miden 1 cm y 13 cm, respectivamente. ¿Cuál es el área, en cm^2, del triángulo PCD? (Este problema incluye figura)



R:

Problema 6. Encuentra el mayor entero positivo n tal que 7^n divide a

$$49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + 49 \cdot 3 \cdot 3! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!.$$

(NOTA: Si n es un entero positivo, entonces $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Por ejemplo, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$)

Problema 7. Ángel escribe en un pizarrón exactamente una vez cada uno de los números de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$. Por ejemplo, uno de esos números que escribe es $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 + 7 + 8 = 18$. Determina la cantidad de números positivos que escribe Ángel.

NOTA: *si más de una expresión de la forma* $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$ *da el mismo resultado positivo, entonces ese resultado se cuenta tantas veces como la cantidad de expresiones que dan dicho resultado.*

R:

Problema 8. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en A y sea Γ su circuncírculo, es decir, la circunferencia que pasa por los vértices A, B y C. La altura desde A corta a Γ en E y sea M el punto medio del arco BC que no contiene a A, es decir, M está sobre la circunferencia, entre B y C, tal que las longitudes de los arcos BM y MC son iguales, y A no está en los arcos BM y MC. EM corta a BC en J. Demuestra que

$$\frac{JE}{JM} = \frac{AE}{BC}$$