V Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica

Virtual, junio 17-21, 2021.

Prueba por Equipos

Nivel III

Estado: ______________________________
Integrantes:

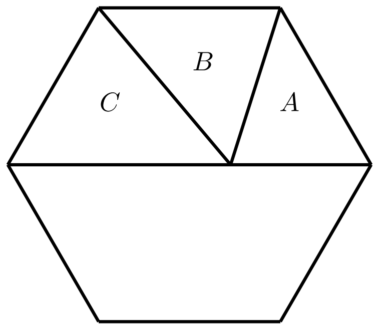
____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. En caso de que las respuestas a estos problemas no sean enteras, estas deben ser aproximadas a dos decimales tomando en cuenta los siguientes valores:

$$\pi = 3.14, \qquad \sqrt{2} = 1.41, \qquad \sqrt{3} = 1.73, \qquad \sqrt{5} = 2.23.$$

Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

Problema 1. En la figura se observa un hexágono regular y una diagonal entre dos vértices opuestos. El área del triángulo B resulta de multiplicar por n el área del triángulo A. El área del triángulo C resulta de multiplicar por m el área del triángulo A. Determina el valor de $2n - m$.



R:

Problema 2. Un número de 5 dígitos *abcde* es *fósil* si cumple las siguientes condiciones:

- El número *ab* es múltiplo de 2
- El número *abc* es múltiplo de 3
- El número *abcd* es múltiplo de 4
- El número *abcde* es múltiplo de 5.

Por ejemplo, el número 10245 es fósil pues 10 es múltiplo de 2, 102 es múltiplo de 3, 1024 es múltiplo de 4 y 10245 es múltiplo de 5.

¿Cuántos números fósil hay?

Problema 3. Sean a y c números reales diferentes de cero y diferentes entre sí, tales que

$$a + \frac{4}{a} = c + \frac{4}{c}.$$

Determina el valor del producto ac.

R:

Problema 4. Encuentra el mayor entero positivo n tal que 7^n divide a

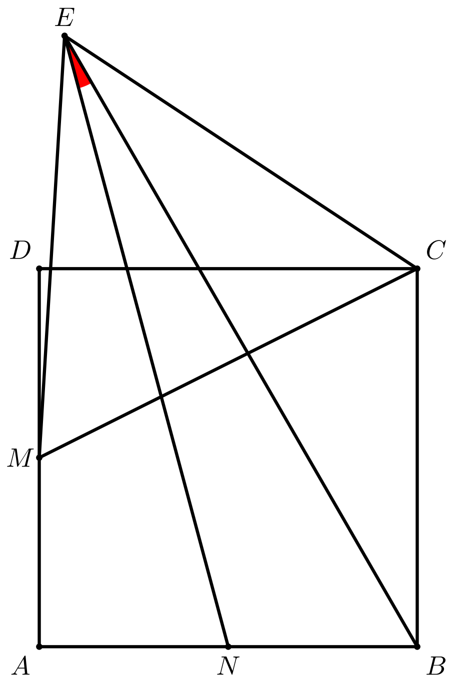
$$49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + 49 \cdot 3 \cdot 3! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!.$$

Problema 5. Ángel escribe en un pizarrón exactamente una vez cada uno de los números de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$. Por ejemplo, uno de esos números que escribe es $-1+2-3+4-5+6+7+8=18$. Determina la cantidad de números positivos que escribe Ángel.

NOTA: *si más de una expresión de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$ da el mismo resultado positivo, entonces ese resultado se cuenta tantas veces como la cantidad de expresiones que dan dicho resultado.*

R:

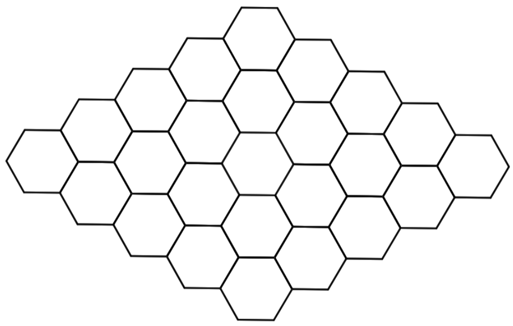
Problema 6. En la siguiente figura, se tiene un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero CME, donde M es el punto medio del segmento AD. Sea N el punto medio de AB. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle NEB$.



Problema 7. Considera todos los números enteros de 7 dígitos que se forman con los dígitos 1, 2 y 3 de manera que el 3 aparezca exactamente 2 veces. ¿Cuántos de tales enteros son divisibles entre 11?

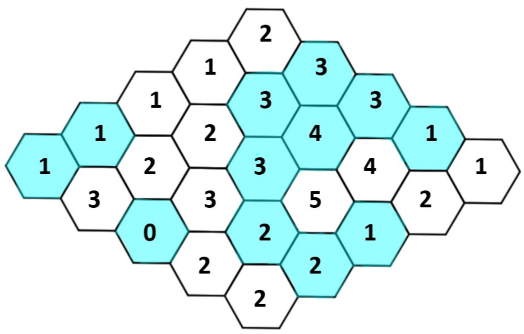
R:

Problema 8. Roberto y Tomás colorean por turnos los hexágonos del siguiente tablero. Empieza Roberto y terminan una vez que hayan coloreado 12 hexágonos en total. Después escriben en cada hexágono la cantidad de hexágonos coloreados con los que comparten un lado y por último suman todos los números de los hexágonos. Si la suma total del tablero es múltiplo de 5, entonces gana Tomás, de otra forma gana Roberto.



¿Quién tiene la estrategia ganadora y cuál es?

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra cómo terminaría una posible partida.



En este caso la suma es 54, por lo que ganó Roberto.