VI Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica
Concurso Nacional

Virtual, junio 9-12, 2022

Prueba por Equipos

Nivel II

Estado: ______________________________
Integrantes:

____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. En caso de que las respuestas a estos problemas no sean enteras, estas deben ser aproximadas a dos decimales tomando en cuenta los siguientes valores:

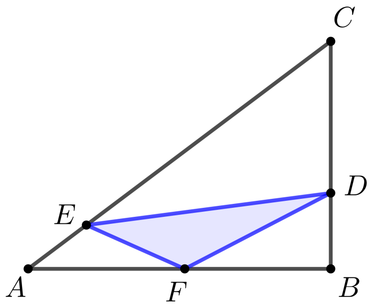
$$\pi = 3.14, \qquad \sqrt{2} = 1.41, \qquad \sqrt{3} = 1.73, \qquad \sqrt{5} = 2.23.$$

Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

Problema 1. El promedio de cinco enteros distintos es 30. Si el menor de estos números es 7, ¿cuál es el mayor valor que puede tener cualquiera de ellos?

R:

Problema 2. En el triángulo ABC, el ángulo $\angle ABC = 90°$ y los puntos D, E y F están sobre los lados CB, AC y AB, respectivamente, de tal forma que $AE = 1, EC = 4, CD = 2, DB = 1, BF = 2$. Calcular el área del triángulo DEF.



.

Problema 3. Un número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ se dice *pariente* si la diferencia entre los números $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ es par. ¿Cuántos números parientes existen tales que sus dígitos están en orden estrictamente creciente?

R:

Problema 4. En algunos lugares se escribe la fecha de la forma $dd/mm/yy$, donde dd es el día, mm el mes, y yy son los últimos dos dígitos del año. Una fecha es *homogénica* si el número de dos dígitos yy es igual al producto de los números dd y mm. Por ejemplo, la fecha 04/03/12 es homogénica, ya que $4 \times 3 = 12$. ¿Cuántas fechas homogénicas hay en un siglo?
Notas:

0 Febrero tiene 28 días; enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 días, y el resto tienen 30 días.

0 Se consideran años bisiestos a todos los múltiplos de 4, en los que febrero tiene 29 días.

Problema 5. ¿Cuántos números de 4 dígitos contienen al menos un 4 y al menos un 3?

R:

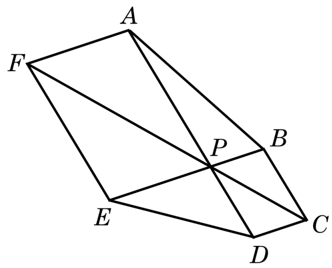
Problema 6. En la oficina de César trabajan de lunes a viernes. Durante la pandemia han estado trabajando a distancia, pero ahora han decidido asistir a la oficina algunos días. Cada persona ha elegido 3 días para asistir; ninguna persona ha elegido asistir los mismos 3 días que otra; todos los días asistirá la misma cantidad de personas, excepto los miércoles que asistirá una menos; y al menos la mitad de las personas asistirá cada día. ¿Cuántas personas trabajan en la oficina de César (incluyéndole)?

Problema 7. El rectángulo $ABCD$ tiene área 2022 y lados enteros. Sea BC uno de los lados mayores del rectángulo. Las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle BCD$ cortan al lado AD en dos puntos dividiendo al segmento AD en tres segmentos. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener el producto de las medidas de esos tres segmentos?

Nota: La bisectriz del ángulo $\angle ABC$ es la recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

R:

Problema 8. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo de tal forma que las diagonales AD, BE y CF se cortan en un punto P. Los cuadriláteros $APEF$ y $BPDC$ son ambos paralelogramos.



Si (XYZ) denota el área del triángulo XYZ, demuestra que

$$4 \cdot (APB) \cdot (DPE) = (APEF) \cdot (BPDC).$$