VI Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica
Concurso Nacional

Virtual, junio 9-12, 2022.

Prueba por Equipos

Nivel III

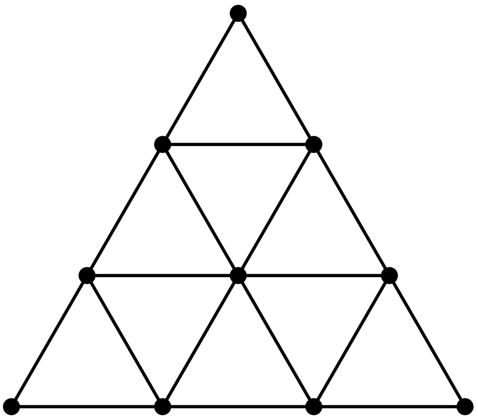
Estado: ______________________________
Integrantes:
____
____
____

Instrucciones: Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos). Para los problemas 1, 3, 5, 7, solo se tomará en cuenta el resultado final, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. En caso de que las respuestas a estos problemas no sean enteras, estas deben ser aproximadas a dos decimales tomando en cuenta los siguientes valores:

$$\pi = 3.14, \qquad \sqrt{2} = 1.41, \qquad \sqrt{3} = 1.73, \qquad \sqrt{5} = 2.23.$$

Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales. La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera: (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir. (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo. (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.

Problema 1. Considera la siguiente figura, donde todos los triángulos pequeños son triángulos equiláteros. ¿Cuántos triángulos obtusángulos hay de tal forma que sus tres vértices son vértices de la figura?
NOTA: Los lados de los triángulos obtusángulos no necesariamente tienen que ser líneas marcadas en la figura.



R:

Problema 2. Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$\frac{3^n + 1}{2^n}$$

es un número entero.

Problema 3. Para cada uno de los nueve enteros positivos

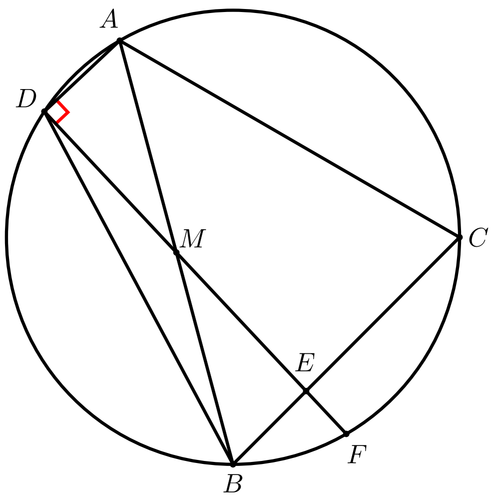
$$n, 2n, 3n, \ldots, 9n,$$

se escribió el primer dígito de la izquierda. Encuentra el menor entero positivo n tal que no haya más de 4 dígitos distintos entre los nueve dígitos escritos.

R:

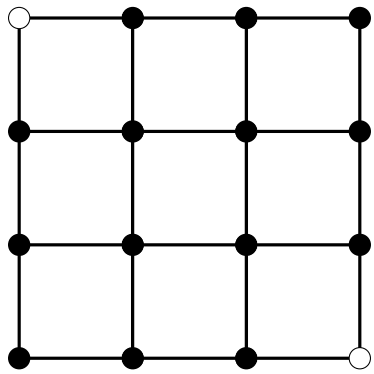
Problema 4. Sean a y b números reales positivos tales que $a - b = \frac{a}{b}$. ¿Qué número es mayor: $a + b$ o ab?

Problema 5. El triángulo ABC cumple que $\angle ABC = 60°$. Sean M el punto medio de AB y ω el circuncírculo del triángulo ABC. Supongamos que el punto D sobre ω cumple que AD es perpendicular a DM y $AC = DB$. La recta DM corta a BC y a ω en E y F, respectivamente. Si $AB = 4\sqrt{3}$ cm, encuentra la longitud de EF en cm.



R:

Problema 6. En una cuadrícula de 3×3 se ubican los 16 vértices de la cuadrícula. Cada vértice está coloreado de blanco o de negro. Un *movimiento* consiste en escoger un cuadrado dentro de la cuadrícula (el cuadrado puede ser de 1×1, 2×2 o de 3×3) y cambiar sus 4 vértices de color, es decir, si un vértice era de color blanco cambiará a negro y viceversa. Supongamos que la cuadrícula está coloreada inicialmente de la siguiente manera:



¿Será posible que, después de una cantidad finita de movimientos, todos los vértices sean del mismo color?

Problema 7. Un cuadrado mágico es un tablero de 3×3 donde se escriben enteros positivos de tal manera que la suma de los números escritos en cada renglón, en cada columna y en cada diagonal es la misma. Determina todos los posibles valores para la casilla inferior izquierda del siguiente cuadrado mágico incompleto.

	11	
		5
?		

R:

Problema 8. En la figura se observan tres cuadrados $BGYF$, $ABXD$ y $BCEZ$ cuyos lados miden a, b y c, respectivamente, tal que $a < b$ y $a < c$. Demuestra que los puntos X, Y, Z son colineales si y solo si

$$\text{Área}(ABC) = \frac{a(b+c)}{2}.$$