VI Olimpiada Mexicana de Matemáticas
para Educación Básica
Concurso Nacional

Virtual, junio 9-12, 2022.

Examen Individual

NIVEL III

Instrucciones: El examen consta de dos partes. La parte A consta de 12 problemas con un valor de 5 puntos cada uno. En estos problemas solo se toma en cuenta la respuesta final, que debe ser claramente escrita en el espacio correspondiente a cada problema, no se darán puntos parciales y no hay penalizaciones por respuestas incorrectas. Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 5 puntos solo si todas las respuestas correctas están escritas y solo ellas. En caso de que las respuestas a estos problemas no sean enteras, estas deben ser aproximadas a dos decimales tomando en cuenta los siguientes valores:

$$\pi = 3.14, \qquad \sqrt{2} = 1.41, \qquad \sqrt{3} = 1.73, \qquad \sqrt{5} = 2.23.$$

La parte B consta de 3 problemas de redacción libre y con un valor de 20 puntos cada uno. En estos problemas es posible acumular puntos parciales. Las figuras mostradas, podrían no estar a escala. No está permitido el uso de calculadoras, transportadores y aparatos electrónicos. La duración del examen es de **2 horas.**

PARTE A

Problema 1. Denisse sumó 5 números consecutivos. Zeus también sumó 5 números consecutivos distintos a los que sumó Denisse. Si la suma que obtuvo Denisse menos la suma que obtuvo Zeus es igual a 100, ¿cuál es la diferencia entre el número más grande de los cinco que sumó Denisse menos el número más grande de los cinco que sumó Zeus?

R:

Problema 2. Una rana está parada en el número 0 de la recta numérica. En cada salto que da la rana se puede mover 3 unidades a la derecha o a la izquierda (por ejemplo, después del primer salto puede llegar al número 3 o al número -3). Después de n saltos la rana llega por primera vez al número 2022. Calcula la suma de todos los valores posibles de n si $n < 1000$.

R:

Problema 3. Una caja fuerte tiene una contraseña de cuatro dígitos. Una persona que no sabe la clave vio las huellas de una persona que insertó la clave, notando que presionó los dígitos 2,8,0. ¿Cuántos intentos necesita para garantizar abrir la caja?

R:

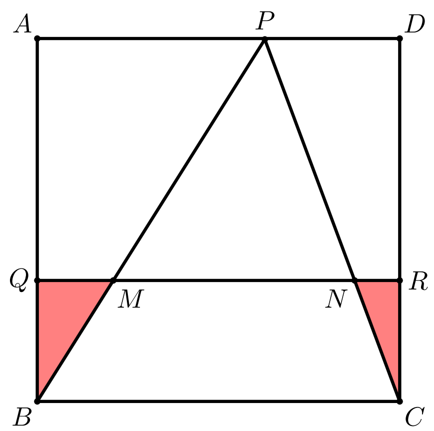
Problema 4. Sea ABC un triángulo equilátero. El punto D es tal que A es punto medio del segmento CD. El círculo con centro en B y radio BD corta a la recta BA en el punto E que cumple que A está dentro del segmento BE. Halla la medida, en grados, de $\angle DEA$.

R:

Problema 5. ¿Cuántos números de 4 dígitos cumplen que la suma de sus dígitos es igual a su producto?

R:

Problema 6. El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lado 12 cm. Se toma P un punto sobre AD, el punto Q sobre AB tal que $AQ = 2QB$ y el punto R sobre CD tal que $DR = 2RC$. Los segmentos BP y CP cortan a QR en los puntos M y N, respectivamente. ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los triángulos QBM y RCN en cm^2?



R:

Problema 7. ¿Cuántas parejas de enteros (n, m), con n y m mayores o iguales que 0, cumplen que $2n + 3m = 2022$?

R:

Problema 8. Encuentra el menor entero positivo de 5 dígitos tal que todos sus dígitos son impares y que su raíz cúbica es un número entero.

R:

Problema 9. Sea $ABCD$ un rectángulo. Un punto E se coloca en la recta CD de tal manera que D quede entre E y C. Sea M el punto medio del segmento AC. Se cumple que $\angle DBC = 40°$ y $\angle EAD = 10°$. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle EMB$.

R:

Problema 10. Un número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ se dice *pariente* si la diferencia entre los números $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ es par. ¿Cuántos números parientes existen tales que $\overline{ab}$ es menor que $\overline{cd}$?

R:

Problema 11. ¿Cuántos números enteros entre 1 y 2022 tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos es 11 y son múltiplos de 11?

R:

Problema 12. En un tablero de 2×4 hay 8 chocolates diferentes, uno en cada casilla. Puedes comer un chocolate si este tiene a lo más 2 chocolates vecinos. ¿De cuántas formas puedes comerte todos los chocolates si solo puedes comer de uno en uno? (Nota: Dos chocolates son vecinos si comparten un lado de una casilla).

R:

PARTE B

Problema 13. Carlos y Diego quieren practicar su puntería con el arco juntos. Para esto van a lanzar flechas por turnos de forma alternada, primero Carlos y luego Diego. De cada 3 turnos consecutivos, Carlos acierta al blanco exactamente 2 veces. De cada 6 turnos consecutivos, Diego acierta al blanco exactamente 4 veces. Tanto Carlos como Diego tienen 25 flechas. Si sabemos que Carlos acertó sus primeros dos turnos y Diego acertó en sus primeros cuatro turnos, ¿para cuántos de los 25 turnos sucede que, al final del turno, Carlos y Diego han acertado en total la misma cantidad de flechas?

Problema 14. Determina el mayor entero positivo n con la siguiente propiedad: para cualquier número primo impar p menor que n, la diferencia $n - p$ es un número primo.

Problema 15. En la figura se observan tres triángulos equiláteros ABD, BEF y BCG, cuyos lados miden 4 cm, 2 cm y 1 cm, respectivamente. Los puntos P, Q y R son los centros de dichos triángulos equiláteros, en ese orden.

a) Determina la medida, en grados, de todos los ángulos internos del cuadrilátero $PQRB$.

b) Calcula el área, en cm^2, del cuadrilátero $PQRB$.