

## Prueba por Equipos

### Nivel III

**Estado:** -----

**Integrantes:** -----

-----

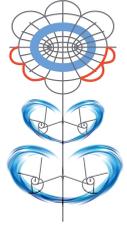
-----

#### Instrucciones:

- Los problemas de la Prueba por Equipos están enlistados por orden de dificultad, pero cada uno vale lo mismo (40 puntos).
- Para los problemas 1, 3, 5, 7, sólo se tomará en cuenta el resultado final, no se darán puntos parciales.
- Los problemas 2, 4, 6, 8, requieren una solución completa y se podrán otorgar puntos parciales.
- No hay penalizaciones por respuestas incorrectas.
- Para las preguntas con varias respuestas, se darán los 40 puntos sólo si todas las respuestas correctas están escritas y sólo ellas.
- En caso de que las respuestas a estos problemas no sean enteras, estas deben ser aproximadas a dos decimales tomando en cuenta los siguientes valores:

$$\pi = 3.14, \quad \sqrt{2} = 1.41, \quad \sqrt{3} = 1.73, \quad \sqrt{5} = 2.23.$$

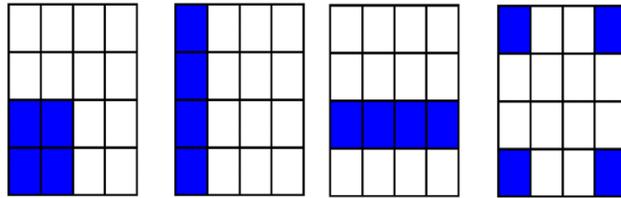
- Las figuras mostradas, podrían no estar a escala.
- No está permitido el uso de calculadoras, transportadores y aparatos electrónicos.
- La duración del examen es 70 minutos, que se distribuirán de la siguiente manera:
  - (i) Durante los primeros 10 minutos, todos los integrantes del equipo podrán discutir y distribuirse entre ellos los primeros 6 problemas, de manera que cada miembro del equipo resuelva al menos un problema. En estos 10 minutos no se puede escribir.
  - (ii) Durante los siguientes 35 minutos, cada participante trabajará individualmente en los problemas que se le asignaron, sin tener comunicación con los demás integrantes del equipo.
  - (iii) Durante los últimos 25 minutos todos los miembros del equipo trabajarán en la solución de los últimos dos problemas.



Estado: -----

No.	Respuesta	Resuelto por
1.		
3.		
5.		
7.		

**Problema 1.** Zaira juega a la lotería con sus amigos con una sola tarjeta de 16 figuras diferentes, una en cada casilla. La lotería tiene 56 cartas en total, con una figura diferente cada carta y se anuncian las cartas de una en una al azar. El juego consiste en que, cada que sale una carta que la persona tiene en su tarjeta, marca ese lugar de la tarjeta y gana cuando se ha marcado un cuadrado pequeño, una línea vertical, una línea horizontal o un cuadrado grande. En las figuras se muestra un ejemplo de cada forma de ganar (hay 18 formas de ganar en total).



Cada que sale una carta que Zaira tiene en su tarjeta, dice con gusto ¡Sí! ¿Cuál es la mínima cantidad de veces que Zaira tiene que decir ¡Sí!, para asegurar que gana en esa partida de la lotería?

R:

Estado: -----

Nivel III

Nombre: -----

**Problema 2.** Sea  $ABC$  un triángulo equilátero y sea  $P$  un punto en su interior. Muestra que se puede formar un triángulo de lados  $PA$ ,  $PB$  y  $PC$ .

**Problema 3.** Sean  $a$  y  $b$  números enteros positivos menores que 223. Al hacer la división de  $ab$  entre  $a + b$ , el cociente es  $q$  y el residuo es  $r$ , esto es,  $ab = q(a + b) + r$  donde  $0 \leq r < a + b$ . Determina cuántas parejas  $(a, b)$ , con  $a > b$ , satisfacen que  $q^2 + r = 2023$ .

R:

**Estado:** -----

**Nivel III**

**Nombre:** -----

**Problema 4.** ¿De cuántas formas se pueden escribir los números enteros del 1 al 4 en las casillas de un tablero de  $4 \times 4$ , si en cada renglón y en cada columna del tablero debe aparecer cada número exactamente una vez?

**Problema 5.** Determina el número de ternas de enteros positivos  $(a, b, c)$ , con  $a \leq b \leq c$ , tales que el número

$$\frac{(a+1)(b+1)(c+1) - 8}{abc}$$

sea un número entero.

R:

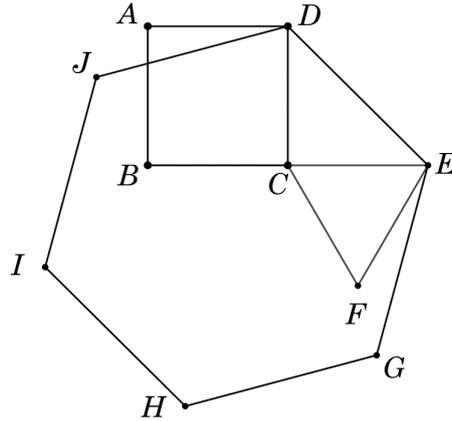
Estado: -----

Nivel III

Nombre: -----

**Problema 6.** En la siguiente figura se tiene un triángulo equilátero  $CEF$ , un cuadrado  $ABCD$  y un hexágono regular  $DEGHIJ$ , donde  $B$ ,  $C$  y  $E$  son colineales y  $BC = CE$ . Demuestra que

$$\text{Área}(ADIJ) + \text{Área}(DEF) = \frac{1}{3}\text{Área}(DEGHIJ).$$



**Problema 7.** Un número *capicúa* es un número entero positivo que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. Si se ordenan todos los números capicúas de menor a mayor, ¿cuál es el número capicúa que está en la posición 2023?

R:

**Estado:** -----

**Nivel III**

**Problema 8.** Inicialmente está escrito el número 126 seguido de 1002 espacios vacíos. Por turnos, Crisanto y Víctor pondrán un 0, un 1 o un 8 donde haya un espacio vacío. Si  $n$  es un entero entre 1 y 10, inclusive, y empieza Crisanto, ¿para qué valores de  $n$ , Víctor puede asegurar que el número escrito al final sea múltiplo de  $n$ ?