



INSTRUCCIONES:

- Tienes 4 horas y media para resolver el examen.
- Para cada problema escribe claramente todo tu procedimiento.
- Solamente puedes hacer preguntas durante la primera hora de examen.

¡Mucha suerte!

PROBLEMAS:

Problema 1. Un número natural de n dígitos es “armonioso” si sus n dígitos son una permutación de $1, 2, 3, \dots, n$ y sus primeros k dígitos forman un número divisible por k , para $k = 1, 2, \dots, n$. Por ejemplo, 321 es armonioso pues 3 es divisible por 1, 32 es divisible por 2 y 321 es divisible por 3. Encuentra todos los números armoniosos de seis dígitos.

Problema 2. Tenemos un polígono regular de 20 lados. ¿Cuántos triángulos hay que tengan sus vértices sobre los vértices del polígono pero que sus lados no sean lados del polígono?

Problema 3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en B y de forma que $AB = 2BC$. Sea D sobre la bisectriz del ángulo $\angle ABC$ tal que $AD = DC$. Demuestra que la perpendicular a BD por A corta a CD en su punto medio.