Examen OMMEB

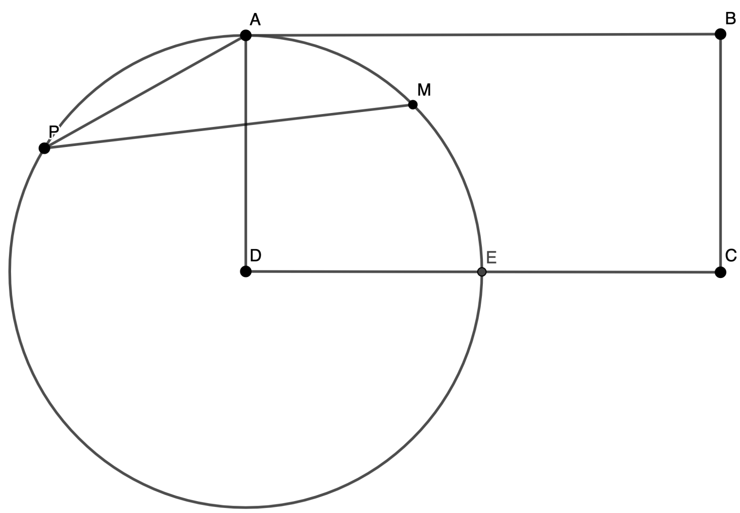
Nivel III

14 de febrero de 2020

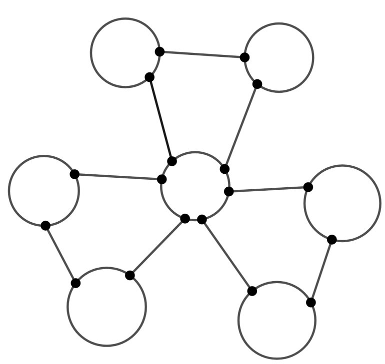
Parte A. Cada problema vale 5 puntos y sólo tomaremos en cuenta la respuesta.

1. De 500 pelotas en una bolsa, 80 % son rojas y el resto azules. ¿Cuántas de las pelotas rojas hay que sacar para que las sobrantes representen el 75 % de las pelotas en la bolsa?

2. En la figura $ABCD$ es un rectángulo. La circunferencia con centro en D y radio AD interseca a DC en E. M es el punto medio del arco $AE^\frown$ y P es un punto en la circunferencia. Determina $\measuredangle APM$.



3. Cecilia va a realizar un collar como el de la figura. Cada cuenca será de uno de cuatro colores (tiene muchas cuencas de cada color). Cecilia quiere que des cuencas unidas por un hilo sean de colores distintos. ¿Cuántos collares distintos puede hacer?



4. El factorial de un número se escribe como $n!$ y significa

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

Por ejemplo $1! = 1$; $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Encuentra

$$\frac{11! - 10!}{9!}$$

5. Un equipo de béisbol jugó 10 partidas en las que anotó $1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$ y 10 carreras. perdieron exactamente una carrera en exactamente 5 juegos. En los demás juegos, ellos anotaron el doble de carreras que son oponentes. En total, ¿cuántas carreras anotaron sus oponentes (entre todos)?

6. Los números naturales a y b cumplen que $ab = 2016$. Si $a \geq b$ ¿Cuál es el valor más pequeño que puede ser $a - b$?

7. Sea ABC un triángulo con $AB = AC$ y O un punto fuera del triángulo, este punto es circuncntro del triángulo. Si $\measuredangle BCO = 10^o$. Encuentra la medida del $\measuredangle BAC$. *Nota.* El circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por los 3 vértices del triángulo.

8. ¿Cuál es el número más pequeño que debes sumarle a $2 \times 10^1 00 - 1$ para que el resultado sea un múltiplo de 11?

9. Encuentra la suma de los números impares debe ser 25 hasta 125 que no acaben en 3.

10. En la segunda figura quieres ir desde el punto A al punto B. Sólo puedes bajar $\searrow, \swarrow$ o ir a la izquierda $\leftarrow$. ¿De cuántas manera puedes hacer esto?

11. El residuo puede ser definido para todos los números reales mayores que cero como

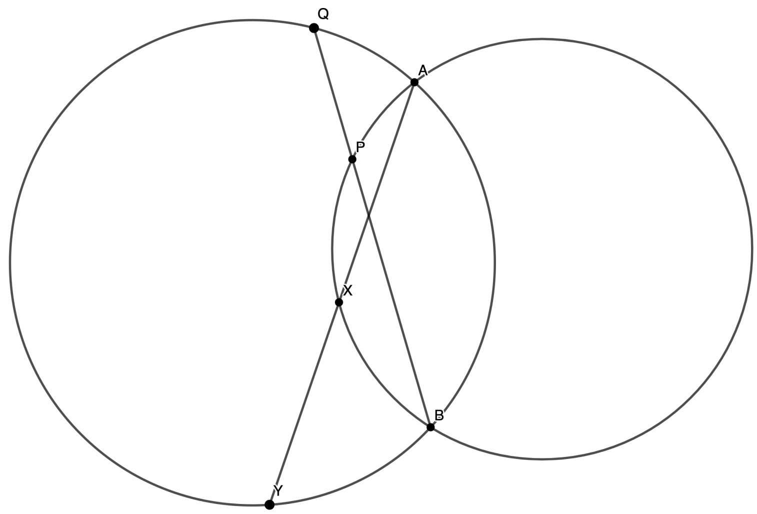
$$res(x, y) = x - y \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$$

donde $\left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor$ es el mayor entero menor o igual a $\frac{x}{y}$; por ejemplo $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\left\lfloor \frac{1}{10} \right\rfloor = 0$. ¿Cuál es el valor de $res\left(\frac{3}{8}, -\frac{2}{5}\right)$?

12. Sean a y a^* dos números distintos con una cantidad impar de cifras de manera que a^* se obtiene al invertir los dígitos de a. Encuentra un posible valor de a tal que $a - a^*$ sea un cuadrado perfecto.

Parte B. Cada problema da hasta 20 puntos, y daremos pntos parciales por avances en la solución.

1. En la figura las circunferencias α y β se cortan en los puntos A y B. Los puntos Q, P, B están alineados así como A, X, Y. Demuestra que $PX || QY$.



2. Tienes tres cajas numeradas como 1,2,3 y muchas pelotas, cada una es azul, blanca o café. Las pelotas se han colocado en las cajas de manera que

   - No hay cajas vacías.
   - No qudaron pelotas de distinto color en tres cajas distintas. Por ejemplo no puedes tomar una pelota azul en la caja dos, una blanca en la 1 y una café en la tres.

   Demuestra que hay dos cajas tal que las pelotas que contienen ambas son todas del mismo color.

3. Determina cuántos enteros positivos n menos que 155 son tales que

$$2n^2 - 5n - 12$$

   es múltiplo de 77.